Universität Potsdam
Institut für Physik

3. Februar 2023
Prof. Metzler, Dr. Cherstvy

Probeklausur zur Statistischen Physik und Thermodynamik

Bitte kennzeichnen Sie das 1. Blatt mit Ihrem Namen!

Fragen: $\boxed{\text{15 Punkte}}$

1. Liouville-Theorem $\boxed{\text{1 Punkte}}$

Was besagt das Liouville-Theorem?

2. Dichteoperator $\boxed{\text{3 Punkte}}$

Welche Eigenschaften hat der Dichteoperator? Wodurch wird ein gemischter Zustand charakterisiert?

3. Ideales Gas $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Wie lauten die thermische und die kalorische Zustandsgleichung für ein klassisches ideales einatomiges Gas?

4. Quantengase $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Skizzieren Sie die $(p-T)$- und $(p-V)$-Diagramme eines idealen Bosegases.

5. Energieerwartungswert $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Zeigen Sie, dass die innere Energie $E(T,V,N)$ aus der kanonischen Zustandssumme $Z(T,V,N)$ über die Beziehung $\langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$ folgt, wo $\beta = 1/(k_B T)$.

6. Homogenitätsrelationen $\boxed{\text{3 Punkte}}$

Wie lauten die Homogenitätsrelationen für die Entropie S, die freie Energie F und das große thermodynamische Potential Ω?

7. Thermodynamische Potentiale $\boxed{\text{2 Punkte}}$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der freien Enthalpie $G(T,p,N)$ und der Enthalpie $H(S,p,N)$?

Aufgaben:

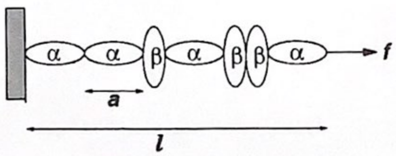
1. Zwei-Niveau-System $\boxed{\text{15 Punkte}}$

Ein Einteilchensystem mit zwei Energiezustände $E_1 = -E_\Delta$ und $E_2 = +E_\Delta$ sei im Wärmekontakt mit einem Reservoir der Temperatur T.

a) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E(T)\rangle$ und die isochore Wärmekapazität $C_V(T)$ des Systems. (8 Punkte)

b) Berechnen Sie die Entropie $S(T)$ und die freie Energie $F(T)$. (7 Punkte)

2. **Modell eines elastischen Stabes** $\boxed{\textbf{15 Punkte}}$



Betrachten Sie eine eindimensionale Kette aus $N \gg 1$ identischen Molekülen (s. Abbildung), die sich in zwei Zuständen (α und β) befinden. Ein Molekül im Zustand α bzw. β trägt a bzw. 0 zur Kettenlänge l bei. Die makroskopischen Parameter sind l und die an Ende der Kette angewendete Kraft f. Die Energie des Stabes ist $E = fl$.

a) Zeigen Sie, dass die Entropie im mikrokanonischen Ensemble

$$S = -k_B N \left[\frac{l}{Na} \ln \frac{l}{Na} + \left(1 - \frac{l}{Na}\right) \ln \left(1 - \frac{l}{Na}\right) \right]$$

lautet. (4 Punkte)

b) Ermitteln Sie die thermische Zustandsgleichung $l = l(f, T)$. (4 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Temperatur $T(l, f)$ und das chemische Potential μ. (4 Punkte)

d) Zeigen Sie mit Hilfe von b), dass für hohe Temperaturen das Hookesche Gesetz gilt. (3 Punkte)

3. **Harmonische Oszillatoren I** $\boxed{\textbf{15 Punkte}}$

Betrachten Sie $N \gg 1$ unterscheidbare klassische eindimensionale harmonische Oszillatoren (jeder mit Masse m und Frequenz ω) mit der Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\{q, p\}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_i^2 \right)$. Berechnen Sie

a) die Zustandssumme $Z(T, N)$ $\left(\text{Ergebnis: } Z = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^N \right)$ und (7 Punkte)

b) die freie Energie F, die Entropie S, die isochore Wärmekapazität C_V, und das chemische Potential μ des Systems. (8 Punkte)

4. **Harmonische Oszillatoren II** $\boxed{\textbf{15 Punkte}}$

Betrachten Sie N unterscheidbare identische wechselwirkungsfreie quantenmechanische eindimensionale harmonische Oszillatoren mit Frequenz ω und Energieniveaus $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. Berechnen Sie im kanonischen Ensemble

a) die Zustandssumme $Z(T, N)$ und (7 Punkte)

b) die freie Energie F, die Entropie S, die innere Energie $E = \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle$, und die isochore Wärmekapazität C_V des Systems. Beschreiben Sie das Verhalten von $C_V(T)$ bei niedrigen und hohen Temperaturen. (8 Punkte)