Brückenkurs Mathematik für Naturwissenschaftler - Aufgabensammlung

Institut für Mathematik, Universität Potsdam

2013

Hinweis: Aufgaben und Kapitel mit einem * sind für Studierende der Mathematik und Physik gedacht.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Logische Zeichen und Mengenlehre

1.1 *Logik*

Aufgabe 1

(i) Schreiben Sie den folgenden Satz in Quantorenschreibweise und bilden Sie die Negation.

Die Menge M ist nach oben beschränkt.

(ii) Schreiben Sie den folgenden Satz in Quantorenschreibweise und bilden Sie die Umkehrung, sowie die Kontraposition.

Ist Menge A Teilmenge von M, so folgt, dass jedes Element x aus A auch in M liegt.

Aufgabe 2

Gegeben sind die logischen Aussagen:
p : $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl
q : Die Gleichung $x^3 = -8$ hat eine Lösung im Bereich der reellen Zahlen
r : 4 ist eine Primzahl
s : Die Funktion $f(x) = \sqrt{4-2x}$ hat den Definitionsbereich $(-\infty, 2]$.

Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussagen $p; q; r; s$ und der Aussage $(p \wedge \overline{q}) \vee \overline{(r \wedge s)}$.
Für den Wahrheitswert von s bitte eine kurze Begründung angeben.

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass folgende Aussagen logisch äquivalent sind:

$$p \wedge (q \vee r) \text{ und } (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

1.2 Mengen und Intervalle

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden Mengen:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$.

Beschreiben Sie die Mengen: $A \cap B, A \cup B \cup C, (A \cap B) \cup C, A \cap (B \cup C)$.
Antwort: $\{4, 5, 6\}, \{1, 2, 3\} \cup [4; \infty), \{0, \ldots, 6\}, A$.

Aufgabe 2

Gegeben sind die folgenden Mengen:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 5x + 4 = 0\}$
$B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 5x - 6 = 0\}$
$C = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 4x = 0\}$.

Bestimmen Sie:

a) $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$

b) $A \cap B$, $C \cap B$, $A \cap B \cap C$

c) $A \backslash B$, $A \backslash C$

d) $B \backslash A$, $C \backslash B$

Aufgabe 3

Gegeben sind die folgenden Mengen:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 \leq 16\}$
$B = [3, 6)$.

Bestimmen Sie:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \backslash B$

d) $B \backslash A$

Kapitel 2

Rechnen mit reellen Zahlen

2.1 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

(Bronstein 2.4.3)

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie:

a) $\dfrac{x^{-2}y^{-2}}{xy^{-3}x^{-4}}$,

b) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$,

c) $\dfrac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}$,

d) $\dfrac{1}{xy^{-1}} : \dfrac{x^{-2}}{x^2y^{-1}x^{-3}}$,

e) $\dfrac{x^{-3}y^3z^{-1}}{x^{-5}y^2z^{-3}} : \dfrac{y^{-3}x^2z}{y^{-2}xz^{-2}}$,

f) $\dfrac{(a^{3n}b^2)^2}{(c^{2m})^2} \cdot \left(\dfrac{a^{2n}b}{c^{2m}}\right)^{-3}$,

g) $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right]^3 : \left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1}\right]^3$,

h) $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{a^2b^4}$,

i) $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2x} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{ax}\right)^{-1}}$.

Antwort: a) xy, b) $(a-b-1)^2$, c) a, d) 1, e) $\frac{xy^2}{z}$, f) bc^{2m}, g) 27, h) ab, i) 1.

Aufgabe 2

Berechnen Sie:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$,

b) $\sqrt{3} \cdot 3^{-1/2} \cdot 9^2 \cdot 9^{-2}$,

c) $3^{\sqrt{8}} : 9^{\sqrt{2}}$,

d) $5^{2-\sqrt{5}} \cdot 25^{\frac{1}{2}\sqrt{5}}$,

e) $\left[\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)\cdot\left(a^{1/2}+5b^{1/2}\right)-\left(a^{1/2}+2b^{1/2}\right)\cdot\left(a^{1/2}-2b^{1/2}\right)\right] : \left(2a+3\sqrt{ab}\right)$.

Antwort: a) $\sqrt[9]{32}$, b) 1, c) 1, d) 25, e) $3\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass $4^{\sqrt{2}} < 8$ ist.

Aufgabe 4

Berechnen Sie (effizient und ohne Taschenrechner)!

a) $(8000^5)^{1/15}$

b) $\frac{(3^{2.4} \cdot 3^{-3.5} \cdot 3^{1/5})^{-2}}{3 \cdot 3^{-1.9}}$

c) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$

d) $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$

e) $\sqrt[10]{5^7 \cdot 125}$

f) $\sqrt{-3 \cdot 2^{-2} \cdot 4 + 2^3}$

g) $\log_5(125)$

h) $\log_{16}(2)$

Antwort: a) 20; b)$3^{2.7}$; c) -3; d) -2; e) 5; f) $\sqrt{5}$; g) 3; h) $\frac{1}{4}$

Aufgabe 5

Schreiben Sie als Potenz von a!

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

b) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

c) $\sqrt[9]{(a^3)^6}$

d) $\sqrt[6]{\left((a^2)^3\right)^4 \cdot a^{-12}}$

Antwort: a) $a^{-\frac{2}{3}}$; b) $a^{\frac{3}{8}}$; c) a^2; d) a^2

Aufgabe 6

Berechnen Sie:

a) $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 121}$,

b) $\sqrt{\frac{144 \cdot 64}{225}}$,

c) $\sqrt{0,04} \cdot \sqrt{0,0004}$,

d) $\frac{\sqrt{0,09} - 0,2}{\sqrt{0,09} + 0,2}$,

e) $\frac{\sqrt{0,0049}}{\sqrt{0,49}}$,

f) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{2\sqrt{2} - 2}\right)^3 - \left[\frac{6 + 5\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 2} - \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})^2\right]$

g) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

h) $4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{-375}$.

i) $\sqrt[4]{(-2)^4}$

j) $\sqrt[3]{512}$

k) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$

l) $5\sqrt[3]{135}$

m) $\frac{\sqrt[3]{625m^4d^3}}{\sqrt[3]{5md}}$

n) $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 7}$

o) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$

p) $\left(\sqrt[18]{a^3 \cdot 27}\right)^6$

q) $\sqrt[4]{3 \cdot 27}$

r) $\frac{6\sqrt{b^3 \cdot 49}}{\sqrt[3]{216 \cdot b^{\frac{9}{2}} \cdot 7}}$

Antwort: a) 308; b) $6,4$; c) $0,004$; d) $0,2$; e) $0,1$; f) 0 g) $\frac{2}{3}$; h) $5 \cdot \sqrt[3]{3}$ i) 2; j) 8; k) 2; l) $3 \cdot 5^{4/3}$; m) $5md^{2/3}$; n) 3; o) 9; p) $a \cdot 3$; q) 3; r) 1.

Aufgabe 7

Schreiben Sie die Brüche so, dass keine irrationale Zahl im Nenner steht:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$,

b) $\dfrac{9\sqrt{2}}{\sqrt{98}+\sqrt{72}}$,

c) $\dfrac{16-12\sqrt{8}}{4\sqrt{18}-\sqrt{128}}$.

d) $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}$.

Antwort: a) $\sqrt{2}+1$, b) $\frac{9}{13}$, c) $2\sqrt{2}-6$, d) $\frac{\sqrt{ab}}{ab}$.

Aufgabe 8

Kürzen Sie die Ausdrücke:

a) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$ für $n^2>4$,

b) $\left(\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}-\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right)\cdot\dfrac{b\sqrt{a^2-b^2}}{4}$ für $a>b>0$.

Antwort: a) n, b) $\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$.

Aufgabe 9

Berechnen Sie:

a) $\log_2 4$, b) $\log_3 3$, c) $\log_{\sqrt{2}} 2$, d) $\log_{12} 1$, e) $\log_{\frac{1}{3}} 27$,

f) $\log_3 36$, g) $\log_a a^3$, $a>0$, $a\neq 1$, h) $\log_2 \sqrt[3]{16}$, i) $\log_3 \sqrt[5]{27}$,

j) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 17}$, k) $25^{1-\log_5 3}+2\cdot 7^{-\log_7 9}$.

Antwort: a) 2, b) 1, c) 2, d) 0, e) -3, f) $2+\log_3 4$, g) 3, h) $\frac{4}{3}$, i) $\frac{3}{5}$, j) 17, k) 3.

Aufgabe 10

$\log_3 x = a$. Berechnen Sie $\log_{27} x$.
Antwort: $\frac{1}{3}a$

Aufgabe 11

Schreiben Sie in <u>einen</u> Logarithmus!

a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{2}{3}\ln(x^2-1)^{3/4}$

b) $\log_{10}(8(x+1))-3\log_{10}(2)$

Antwort: a) $\frac{1}{2}\ln(x^4-1)$; b) $\log_{10}(x+1)$

Aufgabe 12

Formen Sie in <u>einen</u> Logarithmus (der Form $\log_a z^b$) um!

a) $\log_a x+\frac{1}{2}\log_a(x-y)+\frac{1}{2}\log_a(x+y)$

b) $\log_a(x^3+2x^2y+xy^2)-\log_a(x)$

Antwort: a) $\log_a(x\sqrt{(x^2-y^2)})$; b) $\log_a\left((x+y)^2\right)$

Aufgabe 13

Beweisen Sie:

$$\log_{10} 2=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9.$$

2.2 Summen und Produkte

(Bronstein 1.1.2.1)

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die ersten 3 Glieder. $\quad \frac{3n-1}{n+4} \quad n=1;2;...$

Antwort: $\frac{3\cdot1-1}{1+4}=\frac{2}{5};\frac{3\cdot2-1}{2+4}=\frac{5}{6};\frac{3\cdot3-1}{3+4}=\frac{8}{7};...$

Aufgabe 2

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens:

a) $4+5+6+7+8+9+10$,

b) $2+5+10+17+26+37$.

Antwort: a) $\sum_{j=4}^{10} j$, b) $\sum_{j=1}^{6} j^2+1$.

Aufgabe 3

Schreiben Sie ausführlich ohne Hilfe des Summenzeichens:

a) $\sum_{\sigma=2}^{7}(-1)^{\sigma}\sigma^2$,

b) $\sum_{k=0}^{5}(k+2)^2(-1)^{(k+2)}$,

c) $\sum_{j=0}^{3}\binom{4}{j}\binom{4-j}{3-j}\,a^j\,b^{3-j}$.

Antwort: a)=b) $4-9+16-25+36-49$, c) $\binom{4}{0}\binom{4}{3}b^3+\binom{4}{1}\binom{3}{2}ab^2+\binom{4}{2}\binom{2}{1}a^2b+\binom{4}{1}\binom{1}{0}a^3$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen für $n\to\infty$, falls sie existieren. a) $a_n=\dfrac{1+2+3\ldots+n}{n^2}$,

b) $b_n=\sqrt{n^2+n}-n$.

Hinweis: Denken Sie auch mal wieder an die Binomischen Formeln.

Antwort: a) 1/2, b) 1/2.

Aufgabe 5

Berechnen Sie folgende Summen und Produkte!

a) $\displaystyle\sum_{j=2}^{6}(j+2)$

b) $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)+\frac{1}{8}$

c) $\displaystyle\prod_{c=1}^{3}(c+1)$

d) $n!=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}i$ Berechnen Sie **5!** ohne Taschenrechner!!!

Antwort: a) 30; b) 1; c) 24; d) 120

Aufgabe 6

Berechnen Sie folgende Doppelsumme! $\displaystyle\sum_{j=3}^{5}\sum_{k=1}^{3}(j\cdot k^2-2j\cdot k+3)$

Antwort: 51

2.3 Pascalsches Dreieck und binomischer Lehrsatz

Aufgabe 1

Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

a) $(a+b)^3$

b) $(a-b)^3$

c) $(2a+x)^4$

d) $(3a-2b)^5$

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgenden Beziehungen für Binomialkoeffizienten.

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie die folgenden Beziehungen mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Aufgabe 4

Berechnen Sie das konstante Glied von

$$\left(4x + \frac{1}{2x}\right)^6 .$$

2.4 Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

(Bronstein 1.4.3)

Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und Ungleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $x^2 + 2x - 35 = 0$,

b) $6x^2 + x - 1 < 0$,

c) $x^2 + 2x + 5 = 0$,

d) $-3x^2 + x - 5 < 0$,

e) $\dfrac{1}{x^2 + 5x + 4} < 0$,

f) $\dfrac{x + 5}{4 - x} \leq 0$,

g) $\dfrac{x + 3}{x - 3} > \dfrac{x - 1}{x + 5}$,

h) $\dfrac{1 - 2x}{1 + x} - \dfrac{1 + x}{1 + 2x} > 1$,

i) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x} < 0$,

j) $1 < \dfrac{2x^2 - 7x - 29}{x^2 - 2x - 15} < 2$.

Antwort: a) $x = -7 \vee x = 5$, b) $-1/2 < x < 1/3$, c) nicht lösbar, d) x beliebig, e) $-4 < x < -1$, f) $x \leq -5 \vee x > 4$, g) $-5 < x < -1 \vee x > 3$, h) $-1 < x < -1/2$, i) $-2 < x < 0 \vee 2 < x < 5$, j) $-2 < x < 1/3 \vee x > 7$

Aufgabe 2

Lösen Sie die Gleichungen:

a) $|x + 1| = 3$,

b) $|x + 1| = |x - 1|$,

c) $|x + 1| + 2|x - 1| = 5$,

d) $|1 - 2x| + |2x - 6| = x$,

e) $|4 - 2x| + |-x + 3| = 5$,

f) $|x^2 - 7x + 8| = 2$.

Antwort: a) $x = -4 \vee x = 2$, b) $x = 0$, c) $x = -4/3 \vee x = 2$, d) Widerspruch, e) $x = 2/3 \vee x = 4$, f) $x = 1 \vee x = 2 \vee x = 5 \vee x = 6$.

Aufgabe 3

Lösen Sie die Ungleichungen:

a) $2(x-3)+5<3(2x-7)-2$,

b) $2x+\frac{1}{x-2}\leq 10+\frac{1}{x-2}$,

c) $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}>\frac{x}{6}$,

Antwort: a) $x>5,5$; b) $x<2$ oder $2<x\leq 5$; c) $x>3$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Geltungsbereich der Ungleichungen!

a) $2(x-1)(x+2)<0$,

b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x+5}\geq 0$

c) $\frac{y^2-1}{y+1}>0$

d) $(z+1)(z-3)z\leq 0$.
Antwort: a) $x\in\{]-2,1[\}$

b) $x\in\{]-5,-0.5]\cup[3,+\infty[\})$

c) $y>1$ d) $z\in\{]-\infty,-1]\cup[0,3]\}$.

Aufgabe 5

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+19}=\dfrac{3x+32}{\sqrt{x+19}}$; b) $10^{2x}-101\cdot 10^{x}=-100$;

c) $\ln(x^2-2x-1)+\ln 2=\ln(2-2x)$; d) $e^{2x}-5\cdot e^{x}+6=0$

e) $\sqrt{3+x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x+1}$; f) $2e^{x}-3\cdot e^{-x}+5=0$.

Antwort: a) $x=6$; d) $x_1=\ln 2$, $x_2=\ln 3$; e) $x=1$;

Aufgabe 6

Lösen Sie die Gleichungen!

a) $2\cdot 7^{(2+x)}+3\cdot 7^{(3+x)}=161$

b) $9^{(x+2)}=27^{(x-1)}$

c) $2^{2x}+2^{(2x+1)}+4^{x}=16$

d) $6^{-7}\cdot 6^{(x+5)}=\frac{1}{36}$

Antwort: a) $x=-1$; b) $x=7$; c) $x=1$; d) $x=0$

Aufgabe 7

Für welche Werte von k hat die folgende Gleichung reelle Lösungen?

$$x^2 - 4x + 5 = k$$

Antwort: $k = 1$ eine Lösung; $k > 1$ zwei Lösungen; $k < 1$ keine

2.5 *Vollständige Induktion*

Aufgabe 1

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichungen mit Hilfe von vollständiger Induktion

$$a) \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbb{N}; \qquad b) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N},$$

$$c) \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbb{N}; \qquad d) \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1,\ n \in \mathbb{N},$$

indem Sie wie folgt vorgehen:

i) Zeigen Sie die Gültigkeit einer Gleichung explizit für einen Anfangswert n_0!

ii) Unter der Annahme, dass die Gleichung für ein beliebiges $n \geq n_0$ gilt, zeigen Sie, dass sie auch für einen beliebigen Nachfolger gilt.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung:

Sei $x \geq 1$, so gilt: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kapitel 3

Funktionen

3.1 Lineare Funktionen

(Bronstein 2.1.6, 1.6.2, 1.4.3)

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion $f : x \mapsto ax + b$ mit den Koordinatenachsen.
Antwort:
a) $a \neq 0$: zwei Schnittpunkte $(0, b)$, $(-b/a, 0)$;
b) $a = 0$, $b = 0$: Graph identisch mit der x–Achse, d.h., ein Schnittpunkt mit der y–Achse $(0, 0)$, keine Schnittpunke mit der x–Achse;
c) $a = 0$, $b \neq 0$: ein Schnittpunkt mit der y–Achse $(0, b)$, keine Schnittpunke mit der x–Achse.

Aufgabe 2

Ermitteln Sie die lineare Gleichung $f(x) = mx + c$ für folgende Punkte!

a) (2;0),(0;1)

b) (1;0),(1;1)

c) (-2;-2),(1;-2)

d) (0;2),(337;2)

e) (-1;6),(0;1)

f) (-5;-1.5),(5;0.5)

Antwort: a) $f(x) = -0.5x + 1$; b) $x = 1$(keine Funktion); c) $f(x) = -2$; d) $f(x) = 2$; e) $f(x) = -5x + 1$; f) $f(x) = 0.2x - 0.5$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die lineare Gleichung

a) für den Punkt $(-1; -3)$ und die Steigung $-\frac{1}{3}$!

b) für den Punkt $(10; 20)$ und die Steigung 5!

Antwort: a) $f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$; b) $f(x) = 5x - 30$

Aufgabe 4

Gegeben ist die lineare Funktion f, welche durch die Punkte $(0,5|1)$ und $(5|-2)$ geht.

a) Bestimmen Sie die Gleichung von f.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen von f.

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt von f mit der Geraden $g(x) = \frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$.

d) Welche Ursprungsgerade ist parallel (orthogonal) zu f.

Antwort: a) $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$; b) $S_x(2 \mid 0)$, $S_y(0 \mid \frac{4}{3})$; c) $S(-1 \mid 2)$; d) $y = \frac{3}{2}x$

3.2 Quadratische Funktionen

(Bronstein 2.2, 1.6.2)

Aufgabe 1

Gegeben seien die Funktionen:

a) $f : x \mapsto 2x^2 - 5x + 2$,

b) $f : x \mapsto x^2 + x + 1$,

c) $f : x \mapsto -4x^2 + 12x - 9$,

d) $f : x \mapsto -x^2 + x + 2$.

Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen mit den Koordinatenachsen und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie die Graphen.
Antwort:
a) Schnittpunkte: $(0, 2)$, $(1/2, 0)$, $(2, 0)$, Minimum: $x = 5/4$, $f(5/4) = -9/8$;
b) Schnittpunkte:$(0, 1)$, Minimum: $x = -1/2$, $f(-1/2) = 3/4$;
c) Schnittpunkte: $(0, -9)$, $(3/2, 0)$, Maximum: $x = 3/2$, $f(3/2) = 0$;
d) Schnittpunkte:$(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, Maximum: $x = 1/2$, $f(1/2) = 9/4$.

Aufgabe 2

abc-Formel
Leiten Sie die abc-Formel $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ durch Quadratkomplettierung (a.k.a. quadratische Ergänzung) aus $ax^2 + bx + c = 0$ her!

Aufgabe 3

Lösen Sie die quadratischen Gleichungen:

a) $15(x-2)^2 = 16(x-2)$

b) $(x-5)^2 + (2x+3)^2 = (x+1)^2 + 97$

c) $3y^2 + 4(y+1)^2 = 3$

d) nach c auflösen: $c^2 + 2b + 2(c-2b)^2 = -2a$

Antwort: a) $x = \frac{46}{15} \vee x = 2$; b) $x = 4 \vee x = -4$; c) $y = -1 \vee y = -\frac{1}{7}$; d) $c = \frac{4}{3}b \pm \frac{\sqrt{-8b^2-6a-6b}}{3}$

Aufgabe 4

Wenn die Funktion $y = f(x)$ die Normalparabel ist, wie sehen dann folgende Kurven aus?

a) $y = f(x+3)$

b) $y = f(2x)$

c) $y = f\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Antwort: a) 3 nach negativen x verschobene Parabel; b) gestauchte Parabel; c) gestreckt und 1/2 zu positivem x verschoben

3.3 Polynome

(Bronstein 2.2)

Aufgabe 1

Finden Sie ein Polynom vierten Grades, dessen Nullstellen bei x=1, x=2, x=3 und x=4 liegen und welches an der Stelle $x = 5$ den Wert 1 annimmt.
Antwort: $\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Aufgabe 2

a) Entscheiden Sie, ob das Polynom $A(x) = 29x^5 - 16x^3 + 3x^2 - 16$ durch $(x-1)$ teilbar ist.
b) Überprüfen Sie, ob x=4 und x=5 Nullstellen des Polynoms $B(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 9x + 20$ sind.
c) Zeigen Sie, dass das Polynom $C(x) = px^6 + qx^5 + rx^4 - rx^2 - qx - p$ durch $(x+1)$ teilbar ist.
Antwort: a) $A(1) = 0$, b) $B(4) = B(5) = 0$, c) $C(-1) = 0$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den fehlenden Faktor.

a) $(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3) = (x-1)A(x)$,

b) $(x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15) = (x-3)B(x)$,

c) $(x^3 + 6x^2 + 6x + 5) = (x+5)C(x)$,

d) $\left(-4x^3 + 2x^2 - x - \frac{3}{2}\right) = (2x+1)D(x)$,

e) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = (x^2 - 5x + 6)E(x)$,

f) $(x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15) = (x^2 + x + 1)F(x)$.

Antwort: a) $A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$, b) $B(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5$, c) $C(x) = x^2 + x + 1$, d) $D(x) = -2x^2 + 2x - \frac{3}{2}$, e) $E(x) = x - 1$, f) $F(x) = x^2 + 2x - 15$.

Aufgabe 4

Eine Nullstelle des Polynoms $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ ist x=2. Finden Sie alle anderen Nullstellen dieses Polynoms.
Antwort: $x_1 = 2$ (doppelt), $x_2 = 3$

Aufgabe 5

Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$.
Antwort: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ (dreifach)

Aufgabe 6

Lösen Sie die Gleichung $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.
Antwort: $x = -5 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4$

3.4 Gebrochen-Rationale Funktionen

(Bronstein 2.3)

Aufgabe 1

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen:

a) $x \mapsto \dfrac{(x+2)^2(x-3)}{(x-1)(x-2)^2}$,

b) $x \mapsto \dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(x+2)(x+3)}$,

c) $x \mapsto \dfrac{(x-1)(x+2)}{x+3}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die Nullstellen, Pole und Lücken und geben Sie ferner die Gleichungen der Asymptoten an:

$$\text{a)} \quad f(x) = \frac{2x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 8x + 48}{x^3 + x^2 - 4x - 4};$$

$$\text{b)} \quad f(x) = \frac{(x+1)^2(x^2 + x - 2)}{x^3 + 5x^2 + 6x}.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+1}{3-7x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)(4-5x)}{(x^2+3)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - 5x + 7}{x^2 - 6x^4}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-2)^3}{2x^4+3}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$;

f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{3x - 9}$.

3.5 Exponentialfunktionen

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen. Ferner untersuche man das Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$, bestimme den Definitionsbereich und skizziere die Funktionen mit Hilfe einer Wertetabelle:

a) $f(x) = e^{0,5x}$ b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = x \cdot e^x$ d) $f(x) = (x-1)e^{-x}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von f und g.

$$\text{a)} \quad f(x) = e^x, \quad g(x) = 2$$
$$\text{b)} \quad f(x) = e^{2x-1}, \quad g(x) = 1$$

Antwort: a) ln(2); b) 1/2; c) e; d) 1.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Exponentialfunktion der Form $f(x) = c \cdot a^x$, welche durch die folgenden Punkte geht. Skizziere außerdem den Graph der Funktion.

a) $P(0,1) \quad Q(1,2)$ b) $P(0,1) \quad Q(3,27)$

c) $P(2;1,8) \quad Q(3;2,7)$ d) $P(1;2,2) \quad Q(2;1,521)$

Aufgabe 4

Finden Sie die Lösung für x!

a) $e^x + e = 2e^{(2-x)}$

b) $e^{2x} - 3e^{(x+2)} = 0$

c) $e^7 \cdot e^{7x} = \frac{1}{e^9}$

d) $5e^x - 4e^7 = e^7$

Antwort: a) $x = 1$; b) $x = \ln 3 + 2$; c) $x = -\frac{16}{7}$; d) $x = 7$

Aufgabe 5

Barometrische Höhenformel.
Zwischen dem Luftdruck p und der Höhe h (gemessen gegenüber dem Meeresniveau) gilt unter der Annahme konstanter Lufttemperatur der folgende Zusammenhang:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-h/a}, \quad h \geq 0 \quad \text{(in m)}$$

($p_0 = 1{,}013$ bar: Luftdruck an der Erdoberfläche; $a = 7991$ m).

a) Geben Sie die Höhe als Funktion des Luftdruckes an und skizzieren Sie den Funktionsverlauf.

b) In welcher Höhe hat sich der Luftdruck halbiert?

c) Wie groß ist der Luftdruck in 10 km Höhe?

Aufgabe 6

Gegeben ist die Exponentialfunktion $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

a) Erstelle eine Wertetabelle für $-3 \leq x \leq 3$ und skizziere den Graphen von f.

b) Gib das Monotonieverhalten, den Definitionsbereich sowie den Wertebereich von f an.

c) An welcher Stelle nimmt die Funktion den Wert $10{,}125$ an?

3.6 Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie

a) $\cos(\pi - x)$, b) $\sin(\pi/2 - x)$, c) $\cos(3\pi/2 + x)$, d) $\tan(\pi - x)$,

e) $\tan(\pi/2 + x)$, f) $\cot(\pi + x)$, g) $\cot(\pi - x)$.

Antwort: a) $-\cos x$, b) $\cos x$, c) $\sin x$, d) $-\tan x$, e) $-\cot x$, f) $\cot x$, g) $-\cot x$

Aufgabe 2

Beweisen Sie unter Verwendung der Additionstheoreme

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y),$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$$

folgende Gleichungen:

a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$,

b) $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$,

c) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$.

Aufgabe 3

Hyperbelfunktionen. Es gilt:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Beweisen Sie:

a) $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$,

b) $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\cosh(x)$,

c) $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$,

d) $\cos(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$.

Aufgabe 4

Winkelfunktionen am Einheitskreis

a) $\sin(-\frac{\pi}{4})$

b) $\cos(\frac{3\pi}{4})$

c) $\sin(\frac{7\pi}{6})$

d) $\cos(-\frac{5\pi}{3})$

Antwort: a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; c) $-\frac{1}{2}$; d)$\frac{1}{2}$

Aufgabe 5

Funktionswerte von Winkelfunktionen! Füllen Sie die Tabelle aus!

α **in °**	**x in rad**	$\cos(\mathbf{x})$	$\tan(\mathbf{x})$
0			
	$\frac{\pi}{6}$		
45			
	$\frac{\pi}{3}$		
90			
120			
135			
150			
180			
	$\frac{3\pi}{2}$		
360			
390			

Antwort:

α **in °**	**x in rad**	**cos(x)**	**tan(x)**
0	0π	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	0	nicht def.
120	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
180	π	-1	0
270	$\frac{3\pi}{2}$	0	nicht def.
360	$2\pi = 0\pi$	1	0
390	$\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Aufgabe 6

Lösen Sie folgende trigonometrischen Gleichungen! (Geben Sie alle Lösungen an!)

a) $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sin(x) = \frac{1}{2}$

c) $\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\cot(x) = 1$

f) $2\cos^2(x) - \sin(x) = 1$

g) $\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0$

Antwort: a) $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; b) $x = \frac{(4n+1)\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; c) $x = n\pi + \frac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$; d) $x = n\pi + \frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$; e) $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; f) $x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$; g) $x = \frac{8n\pi}{6} + 2k\pi$, $n, k \in \mathbb{Z}$ oder $x = \begin{cases} \frac{(2n+1)\pi}{2} \\ \frac{(4n+1)\pi}{2} \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 7

Skizieren Sie folgende Sinus-/Cosinusfunktionen und vergleichen Sie mit $f(x) = \sin(x)$!:

a) $f_1(x) = 3\sin(x),\ f_2(x) = \frac{1}{3}\sin(x)$

b) $f_1(x) = \sin(-2x),\ f_2(x) = \sin(\frac{1}{2}x),\ f_3(x) = \sin(2x)$

c) $f_1(x) = \cos(x),\ f_2(x) = \cos(\frac{1}{2}x),\ f_3(x) = \cos(2x)$

Antwort: a)a) Amplitude gestreckt (f_1) oder gestaucht (f_2); b) Gespiegelt an der y-Achse und halbe Wellenlänge (f_1), doppelte Wellenlänge (f_2), halbe Wellenlänge (f_3); c) $\cos(x)$ ist wie $\sin(x + \frac{\pi}{4})$, also um $\frac{\pi}{4}$ nach links verschoben (f_1), doppelte Wellenlänge (f_2), halbe Wellenlänge (f_3).

3.7 Umkehrfunktionen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich folgender Funktion

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Bestimmen Sie weiterhin die Umkehrfunktion f^{-1} und zeichnen Sie beide Funktionen in ein geeignetes Koordinatensystem.
Antwort: $f^{-1}(x) = \ln(\frac{-x}{x-1})$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen. Ferner untersuche man das Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$, bestimme den Definitionsbereich und skizziere die Funktionen mit Hilfe einer Wertetabelle. Bilde außerdem die Umkehrfunktion von f.

a) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x^3-8}$

c) $f(x) = \ln(x-1)$ d) $f(x) = (\ln(x))^2$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von f und g.

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad f(x) = \ln(x), \quad g(x) = 1 \\ &\text{b)} \quad f(x) = \ln(2x-1), \quad g(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

Antwort: a) e; b) 1.

Aufgabe 3

Bestimme die Logarithmusfunktion der Gestalt $f(x) = \log_a(x)$, die durch den Punkt $P(8;3)$ verläuft und skizziere diese mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktionen und geben Sie jeweils die Umkehrfunktion f^{-1} an.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ b) $f(x) = \sqrt{x+2} - 2$ c) $f(x) = e^{\sqrt{x}+1}$.

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 *Der Differentialquotient*

Aufgabe 1

Berechnen Sie die erste Ableitung im Punkt x_0 mit Hilfe des Differentialquotienten von folgenden Funktionen

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x$

c) $f(x) = x^3 - 4$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$

4.2 Ableitungsregeln

4.2.1 Graphische Ableitung

Aufgabe 1

Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen! Bestimmen Sie anhand des Graphenverlaufs die Ableitungen $f'(x)$ dieser Funktionen und skizzieren Sie auch diese!

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = \sin(x)$

c) $f(x) = \ln(x)$

d) $f(x) = 3$

e) $f(x) = -\cos(x)$

f) $f(x) = e^x$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$

h) $f(x) = 2x^2$

i) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$

j) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Antwort:

$$a)\ 1 \quad b)\ \cos(x) \quad c)\ \frac{1}{x} \quad d)\ 0 \quad e)\ \sin(x) \quad f)\ e^x \quad g)\ -\frac{1}{x^2} \quad h)\ 4x \quad i)\ \frac{3}{2}x^2 \quad j)\ -\frac{2}{x^3}$$

4.2.2 Rechenregeln

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a) $x \mapsto x^7 - 4x^5 + 13x^4 - x + 19$,

b) $x \mapsto \sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}}$.

c) $x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$,

d) $x \mapsto 1 + x + x^2$,

e) $x \mapsto e^x - \cos(x)$,

f) $x \mapsto \ln(x) + 3$,

g) $x \mapsto \frac{1}{x} + 4x^2$,

h) $x \mapsto -\sin(x) - \ln(x) + 3x$,

i) $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x}} + 17x^3$,

j) $x \mapsto \ln(e^x) + 3x^7$,

k) $x \mapsto x + (e^{\frac{x}{2}})^2 - \cos(x)$,

l) $x \mapsto \tan(x) + \frac{4}{x^3}$.

Antwort: a) $7x^6 - 20x^4 + 52x^3 - 1$, b) $\frac{23}{24}\frac{1}{\sqrt[24]{x}}$, c) $-\sin(x) + \cos(x)$, d) $1 + 2x$, e) $e^x + \sin(x)$, f) $1/x$, g) $-\frac{1}{x^2} + 8x$, h) $-\cos(x) - 1/x + 3$, i) $\frac{3}{2}\sqrt{x} + 51x^2$, j) $1 + 21x^6$, k) $1 + e^x + \sin(x)$, l) $\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{12}{x^4}$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der Produktregel.

a) $x \mapsto (x^2 + x) \cdot e^x$,

b) $x \mapsto 4x^3\sqrt{x}$,

c) $x \mapsto x^3 \cos x$,

d) $x \mapsto x \cdot \ln(x)$,

e) $x \mapsto x^2 \cos(x)$,

f) $x \mapsto -\sqrt{x}\sin(x)$,

g) $x \mapsto 11x^2e^x$,

h) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2}$,

i) $x \mapsto (3x + x^2)^2$,

j) $x \mapsto \frac{1}{x}\sqrt{2x^3}$,

k) $x \mapsto x^2\sqrt{x}\ln(x)$,

l) $x \mapsto x^2 \sin(x)\cos(x)$.

Antwort: a) $e^x(1 + 3x + x^2)$ b) $14x^2\sqrt{x}$, c) $3x^2 \cos x - x^3 \sin x$, d) $1 + \ln(x)$, e) $2x\cos(x) - x^2 \sin(x)$, f) $-\frac{\sin(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\cos(x)$, g) $11e^x(x^2+2x)$, h) $-\frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{2\cos(x)}{x^3}$, i) $18x + 18x^2 + 4x^3$, j) $\frac{1}{\sqrt{2x}}$, k) $\sqrt{x^3}(\frac{5}{2}\ln(x) + 1)$, l) $x^2\cos^2(x) + 2x\sin(x)\cos(x) - x^2\sin^2(x)$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die äußere Funktion $h(g)$ und die innere Funktion $g(x)$ folgender Funktionen $f(x) = h(g(x))$!

a) $(x^2 + 1)^3$,

b) $\cos(e^x)$,

c) $\ln(3x^2 + 3x + 1)$,

d) $\sqrt{3x^2 + 7}$,

e) $-\sin(x^2 + 2)$,

f) $\frac{1}{3x+x^2}$,

g) $\sqrt[3]{(3x + 5)^2}$,

h) $\exp(\frac{17}{4}x^7)$.

Antwort: a) $h(g) = g^3;\ g(x) = x^2 + 1$, b) $h(g) = \cos(g);\ g(x) = e^x$, c) $h(g) = \ln(g);\ g(x) = 3x^2 + 3x + 1$, d) $h(g) = \sqrt{g};\ g(x) = 3x^2 + 7$, e) $h(g) = -\sin(g);\ g(x) = x^2 + 2$, f) $h(g) = \frac{1}{g};\ g(x) = 3x + x^2$, g) $h(g) = g^{2/3};\ g(x)3x + 5$, h) $h(g) = e^g;\ g(x) = \frac{17}{4}x^7$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die zusammengesetzte Funktion $f(x) = h(g(x))$!

a) $g(x) = 7x - 1;\ h(g) = \cos(g)$,

b) $g(x) = \ln(x);\ h(g) = g^3 + 1$,

c) $g(x) = \frac{12}{7}x^2;\ h(g) = e^g$,

d) $g(x) = -\sin(x);\ h(g) = 5g^3$,

Antwort: a) $\cos(7x - 1)$, b) $(\ln(x))^3 + 1$, c) $\exp(\frac{12}{7}x^2)$, d) $-5\sin^3(x)$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel.

a) $x \mapsto (4x^5 - 7x^3 + 14x^2 - 5)^3$,

b) $x \mapsto \sqrt{3x^2 - 7x + 12}$,

c) $x \mapsto e^{-2x^2+3}$,

d) $x \mapsto (\cos(x))^2$,

e) $x \mapsto (x^2 + 1)^3$,

f) $x \mapsto \cos(e^x)$,

g) $x \mapsto \ln(3x^2 + 3x + 1)$,

h) $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$,

i) $x \mapsto \sqrt{3x^2 + 4}$,

j) $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$,

k) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - \sin(x)}$,

l) $x \mapsto (\frac{3}{7}x^3 + 2x)^{2/3}$,

Antwort: a) $3(4x^5 - 7x^3 + 14x^2 - 5)^2(20x^4 - 21x^2 + 28x)$, b) $\frac{6x-7}{2\sqrt{3x^2-7x+12}}$, c) $-4e^{3-2x^2}x$, d) $-2\cos(x)\sin(x)$, e) $6x(x^2 + 1)^2$, f) $-\sin(e^x)e^x$, g) $\frac{6x+3}{3x^2+3x+1}$, h) $\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$, i) $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$, j) $\exp(-\frac{1}{x^2})\frac{2}{x^3}$, k) $-\frac{2x-\cos(x)}{(x^2-\sin(x))^2}$, l) $\frac{\frac{6}{7}x^2+\frac{4}{3}}{\sqrt[3]{\frac{3}{7}x^3+2x}}$,

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der Quotientenregel.

a) $x \mapsto \dfrac{1}{x - 1}$,

b) $x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{2x + 3}$,

c) $x \mapsto \dfrac{ln(x)}{x}$,

d) $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Antwort: a) $\frac{-1}{(-1+x)^2}$, b) $\frac{2(-1+3x+x^2)}{(3+2x)^2}$, c) $\frac{1-\ln(x)}{x^2}$, d) $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$,

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

a) $x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$,

b) $x \mapsto \sin^3\sqrt{\frac{1-2x}{x}}$,

c) $x \mapsto x^x$,

d) $x \mapsto \dfrac{2^{\cos(x)}}{ln(x)}$,

e) $x \mapsto x^3 \cdot \cos(x)$,

f) $x \mapsto x \cdot \ln(x)$,

g) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{e^x}$,

h) $x \mapsto x^2 e^{-x^2}$,

i) $x \mapsto -\sin(x^2 e^x)$,

j) $x \mapsto (2\ln(x) + 3x^3)^4$,

k) $x \mapsto \sqrt[3]{12x^2\ln(x)+3}$,

l) $x \mapsto \ln(\frac{1}{3x+x^2})$.

Antwort: a) $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$, b) $-\frac{3}{2x\sqrt{x(1-2x)}}\sin^2\sqrt{\frac{1-2x}{x}}\cos\sqrt{\frac{1-2x}{x}}$, c) $x^x(1+\ln(x))$, d) $\frac{-(2^{\cos(x)}(1+x\ln(2)\ln(x)\sin(x)))}{x\ln^2(x)}$, e) $3x^2\cos(x) - x^3\sin(x)$, f) $\ln(x)+1$, g) $\frac{1}{xe^x} - \frac{\ln(x)}{e^x}$, h) $2e^{-x^2}(x - x^3)$, i) $-\cos(x^2e^x)e^x(x^2+2x)$, j) $(2\ln(x)+3x^3)^3(\frac{8}{x}+36x^2)$, k) $\frac{24x\ln(x)+12x}{3(12x^2\ln(x)+3)^{2/3}}$, l) $-\frac{2x+3}{3x+x^2}$.

Aufgabe 7

Berechnen Sie den Winkel, welchen die Tangente an der Parabel

$$y = x^2 - 3x + 8$$

im Punkte $x = 1$ mit der x–Achse bildet.
Antwort: $\frac{3}{4}\pi$

Aufgabe 8

Berechnen Sie, in welchem Punkt die Tangente an der Kurve

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

parallel zur x–Achse ist.
Antwort: $(-1, 7)$ und $(3, -25)$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der Produktregel!

a) $f(x) = x^2 \cos(x)$,

b) $f(x) = -\sqrt{x} \sin(x)$,

c) $f(x) = 11x^2 e^x$,

d) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$,

e) $f(x) = (3x + x^2)^2$,

f) $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{2x^3}$,

g) $f(x) = x^2\sqrt{x} \ln(x)$,

h) $f(x) = x^2 \sin(x) \cos(x)$.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel!

a) $f(x) = (x^2 + 1)^3$ *b)* $f(x) = \cos(e^x)$ *c)* $f(x) = \ln(3x^2 + 3x + 1)$

d) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ *e)* $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$ *f)* $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$

g) $f(x) = \frac{1}{x^2 - \sin(x)}$ *h)* $f(x) = (\frac{3}{7}x^3 + 2x)^{2/3}$

Aufgabe 11

Bestimmen Sie mit Hilfe von Produkt- und Kettenregel die Ableitungen folgender Funktionen!

a) $f(x) = x^3 \cdot \cos(x)$ *b)* $f(x) = x \cdot \ln(x)$ *c)* $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$

d) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ *e)* $f(x) = -\sin(x^2 e^x)$ *f)* $f(x) = (2\ln(x) + 3x^3)^4$

g) $f(x) = \sqrt[3]{12x^2 \ln(x) + 3}$ *h)* $f(x) = \ln(\frac{1}{3x + x^2})$

4.3 Kurvendiskussion

Aufgabe 1

Gegeben Sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$.

a) Untersuchen Sie f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graph von f für $-4 \leq x \leq 4$.

b) Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktionen f und g mit $g(x) = -x^2 + 4,5x - 3$ berühren.

c) Wie lautet die Gleichung der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkt?

Aufgabe 2

Untersuchen Sie f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen, Extrem- und Wendepunkte und zeichnen Sie den Graphen von f im angegebenen Intervall.

a) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4; \quad -2 \leq x \leq 2$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x; \quad -0,5 \leq x \leq 2,5$

c) $f(x) = \frac{1}{8}(3x^4 - 8x^3 + 16); \quad -1 \leq x \leq 3$

Aufgabe 3

Gegeben Sei die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) Untersuchen Sie f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graph von f für $-1,5 \leq x \leq 3,5$.

b) Bestimmen Sie die Steigung der Funktion in den Achsenschnittpunkten und berechnen Sie den dazugehörigen Schnittwinkel.

c) Wie lautet die Gleichung der Wendetangente?

Aufgabe 4

Gegeben Sei die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

a) Untersuchen Sie f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graph von f für $-4 \leq x \leq 4$.

b) Ein im ersten Quadranten liegender Punkt $Q(u|\ f(u))$ mit $u > 0$, der Punkt $P(u, 0)$ und der Koordinatenursprung bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Berechnen Sie u für den Fall, dass dieses Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat.

c) Wie lautet die Gleichung der Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse?

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f. Untersuchen Sie f ferner auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graph von f für $-2,5 \leq x \leq 4,5$.

b) Die Gerade mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{5}{9}x + \dfrac{2}{9}$ und f haben zwei gemeinsame Punkte. Berechnen Sie diese.

Aufgabe 6 (Zentralabitur 2013 Berlin/Brandenburg (LK))

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = e^{a\cdot(x-3)} + e^{a\cdot(3-x)};\ x \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Ihre Graphen heißen G_a und werden Kettenlinien genannt, weil sie die Form einer hängenden Kette haben.

a) Untersuchen Sie G_a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass alle Graphen G_a den gleichen lokalen Extrempunkt haben und ermitteln Sie dessen Koordinaten und Art. Begründen Sie, dass G_a keine Wendepunkte besitzt.

c) Zeichnen Sie $G_{0,5}$ mindestens im Intervall $[-1;\ 7]$ in ein Koordinatensystem. Im Intervall $[0;\ 6]$ lässt sich $G_{0,5}$ durch eine Parabel zweiten Grades annähern, die im Tiefpunkt und den beiden Randpunkten mit $G_{0,5}$ identisch ist. Bestimmen Sie für die zu dieser Parabel gehörende Funktion p die

Funktionsgleichung. Runden Sie am Ende die Koeffizienten auf eine Stelle nach dem Komma.

d) Damit sich beispielsweise an Theater- oder Kinokassen geordnete Menschenschlangen bilden, nutzt man verschiebbare und variabel zusammenstellbare Absperrketten oder -seile. Ein Kettensegment besteht aus zwei senkrecht auf dem Fußboden stehenden Pfosten und einer Kette. Der Fußpunkt des linken Pfostens sei der Koordinatenursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit $1\text{ LE} = 0,5\text{ m}$. Die Kette kann durch $G_{0,2}$ modelliert werden. Bestimmen Sie, in welcher Höhe und unter welchem Winkel die Kette am linken Pfosten befestigt ist. Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von der Kette, den beiden Pfosten und der Verbindungsstrecke zwischen den Fußpunkten der Pfosten eingeschlossen wird.

e) Eine Kettenlinie ist stets symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse, die durch den Extrempunkt der Kettenlinie verläuft. Zeichnen Sie die Symmetrieachse sowie zwei Punkte $P_1(x_E+t \mid f_{0,5}(x_E+t))$ und $P_2(x_E-t \mid f_{0,5}(x_E-t))$ mit $t < 3$ in Ihre Darstellung aus Teilaufgabe c) ein. Weisen Sie nach, dass für $G_{0,5}$ die beschriebene Symmetrie gilt.

Aufgabe 7 (Zentralabitur 2013 Berlin/Brandenburg (GK))

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x+3)\cdot(x^2-2);\ x \in \mathbb{R}$. Der Graph dieser Funktion ist G.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G mit den Koordinatenachsen und weisen Sie nach, dass G weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

b) Der Graph der Funktion f beschreibt modellhaft das Profil eines Kanals $(-\sqrt{2} \leq x \leq +\sqrt{2})$ sowie die links angrenzende Uferböschung mit Erhebung, $1\text{ LE} = 1\text{ m}$. Die x-Achse befindet sich auf der Höhe der Kanalwasseroberfläche (eine Skizze könnte hilfreich sein). Berechnen Sie die größte Tiefe des Kanals und die maximale Höhe der linken Uferböschung relativ zur Wasseroberfläche.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$]

c) Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Kanals.

d) Der Graph von G besitzt genau einen Wendepunkt $\text{W}(-1|-2)$. Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung für die Wendetangente an G.

[Zur Kontrolle: $t_W : y = -5x - 7$]

Durch Parallelverschiebung der Wendetangente in y-Richtung erhält man eine Gerade h, die im ersten Quadranten mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $2,5$ FE einschließt. Ermitteln Sie eine Gleichung für h.

Kapitel 5

Integralrechnung

5.1 *Konstruktion des Integrals*

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Flächeninhalt mittels Riemannscher Summen von folgenden Funktionen

a) $f(x) = 2x$ über dem Intervall $[0, 1]$,

b) $f(x) = x^2$ über dem Intervall $[0, 1]$,

c) $f(x) = x^3$ über dem Intervall $[0, 1]$.

5.2 Stammfunktionen

(Bronstein 8.1)

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Stammfunktion von

a) $x \mapsto x\,(x-1)\,(x-2)$,

b) $x \mapsto (x^2 - x + 1)^2$,

c) $x \mapsto (x^2 + a^2)\,x$,

d) $x \mapsto \frac{x\,(\sqrt{x} - x^2\,\sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}}$, $x > 0$,

e) $x \mapsto \frac{(x^2-1)^3}{x}$,

f) $x \mapsto (x-3)(x-2)$,

g) $x \mapsto \cos(x)$,

h) $x \mapsto e^{3x}$,

i) $x \mapsto \sqrt{x}$,

j) $x \mapsto \frac{1}{x}$,

k) $x \mapsto x$,

l) $x \mapsto x^5 + 4\sin(x)$,

m) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{2} + \frac{1}{x^2}$,

n) $x \mapsto \frac{x^5}{x^2}$,

o) $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$,

p) $x \mapsto \tan(x)\cos(x)$,

q) $x \mapsto x^7 + x + \frac{1}{x^7}$,

r) $x \mapsto 5$,

s) $x \mapsto x^{2a}$,

t) $x \mapsto \frac{1}{x^{-3}}$,

u) $x \mapsto x^0$.

Antwort: a) $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + C$, b) $x \mapsto \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x^2 + x + C$, c) $\frac{1}{4}(x^2 + a^2)^2 + C$, d) $\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} - \frac{12}{49}x^4\sqrt[12]{x} + C$, e) $\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \ln|x| + C$. f) $\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + C$, g) $\sin(x) + C$, h) $\frac{e^{3x}}{3} + C$, i) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$, j) $\ln(x) + C$, k) $\frac{1}{2}x^2 + C$, l) $\frac{1}{6}x^6 - 4\cos(x) + C$, m) $\frac{\sin(x)}{2} - \frac{1}{x} + C$, n) $\frac{x^4}{4} + C$, o) $\frac{x^2}{2} - x + C$, p) $-\cos(x) + C$, q) $\frac{x^8}{8} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{-6x^6} + C$, r) $5x + C$, s) $\frac{x^{2a+1}}{2a+1} + C$, t) $\frac{x^4}{4} + C$, u) $x + C$,

Aufgabe 2

Die Beschleunigung in einer geradlinigen Beweung wird durch die Formel $a = 12\,t^2 + 18\,\sin(3t) - 2$ gegeben. Finden Sie die Formel für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit, wenn für $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = 10$. Finden Sie die Formel für den Weg x, wenn $x = 5$ für $t = 0$.
Antwort: $v = 4t^3 - 6\cos(3t) - 2t + 16$, $x = t^4 - 2\sin(3t) - t^2 + 16t + 5$

5.3 Der Hauptsatz der Analysis

Aufgabe 1

Skizzieren und berechnen Sie folgende Flächen.
a) $\int_{-1}^{1} x^2 dx$,

b) $\int_{-1}^{1} cos(x) dx$,

c) $\int_{-1}^{1} x^3 dx$,

d) $\int_{-1}^{1} (x+5) dx$,

e) $\int_{-1}^{1} |x|$.

Welche der Funktionen ist bezogen auf die y-Achse symmetrisch?

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Integrale!
a) $\int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x) dx$

b) $\int_{0}^{4} 6e^{2x} dx$

c) $\int_{1}^{2} (x^2 + \frac{1}{x}) dx$

d) $\int_{0}^{2} 3x^4 dx$

e) $\int_{0}^{2\pi} \cos(x) dx$

f) $\int_{5}^{10} 10 dx$

Antwort: a) 2, b) $3e^8 - 3$, c) $\frac{8}{3} + \ln 2 - \frac{1}{3}$, d) $\frac{96}{5}$, e) 0, f) 50,

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die durch die x–Achse, die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ und den Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x^2+1}$ beschränkt ist.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die durch die Parabel $y^2 = 2x$ und die Gerade $x = 8$ beschränkt ist.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die durch die x–Achse, die Geraden $x = -2$ und $x = 2$ und den Graphen der Funktion $y = x^3 + x^2 - 2x$ beschränkt ist.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die durch die Parabeln $y = x^2$ und $y^2 = x$ beschränkt ist.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die durch die Linien $y = x^3$ und $y = 4x$ beschränkt ist.

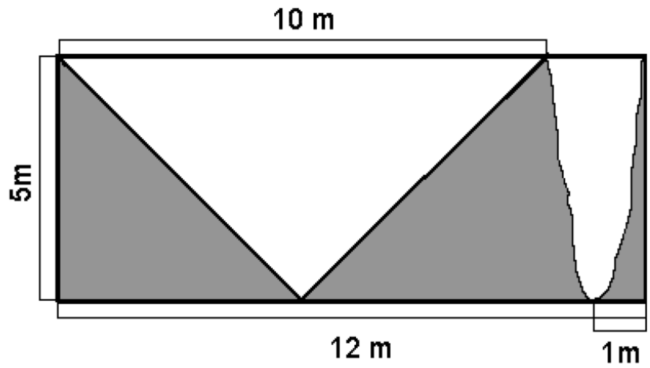
f) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die durch die Linien $xy = 4$ und $x + y = 5$ beschränkt ist.

g) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die durch die Linien $y = 2x - x^2$ und $x + y = 0$ beschränkt ist.

Antwort: a)$\frac{1}{2}\pi$, b)$\frac{128}{3}$, c)$\frac{37}{6}$, d)$\frac{1}{3}$, e)8, f)$\frac{15}{2} - 8\ln 2$, g)$\frac{9}{2}$.

Aufgabe 4

Lösen Sie folgendes "Maler"-Problem mithilfe von Integralen:
Ein mathematisch besessener Kunde möchte von Ihnen seine Wand mit grauer Farbe gestrichen bekommen. Sie misst insgesamt 5 x 12 Meter. Auf der linken Seite möchte er das Integral der Funktion $f(x) = |x|$ auf einer Fläche von 5 x 10 Meter mit grauer Farbe dargestellt haben, wobei der Punkt 0 auf Bodenhöhe und 5 Meter von der linken Wand entfernt liegen soll. Auf den restlichen 2 Metern der Wand soll das Integral der Funktion $f(x) = 5x^2$ ebenfalls mit grauer Farbe dargestellt werden (Scheitelpunkt 1 m von der Wand). Der Rest der Wand soll weißbleiben. Für wieviel m^2 müssen sie mindestens graue Farbe besorgen?



5.4 Integrationsmethoden

5.4.1 Partielle Integration

(Bronstein 8.1.2.7)

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int x\, e^x\, dx$,

b) $\int x \sin x\, dx$,

c) $\int e^x \sin x\, dx$,

d) $\int \ln x\, dx,\ x > 0$,

e) $\int x^{10} \ln x\, dx,\ x > 0$,

f) $\int (\ln x)^2\, dx,\ x > 0$,

g) $\int \arctan x\, dx$.

Antwort:
a) $e^x\,(x-1)+C$, b) $-x\cos x+\sin x+C$, c) $\frac{1}{2}e^x\,(\sin x-\cos x)+C$, d) $x\,(\ln x-1)+C$, e) $\frac{1}{11}x^{11}\,(\ln x - \frac{1}{11}) + C$, f) $x\ ((\ln x)^2 - 2\ln x + 2) + C$, g) $x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \sin x\, dx$,

b) $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$,

c) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (x+1) \cos x\, dx$.

Antwort: a) 1, b) $\frac{-2}{e} + 1$, c) $\frac{1}{2}\pi$

5.4.2 Die Substitutionsregel

(Bronstein 8.1.2.6)

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) Berechnen Sie $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$. Setzen Sie dabei $t = \sqrt{x} + 1$ und schreiben Sie f(x) vorher so um, dass f(x) ein Produkt ist bei dem der eine Term $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist.

b) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $(x^2 + 2x)^3(2x + 2)$ indem Sie $x^2 + 2x$ durch t ersetzen.

c) $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\, dx,\ a \neq 0$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$, $x > 3/2$,

e) $\int x^2\sqrt{2x^3-3}\,dx$, $x > \sqrt[3]{3/2}$,

f) $\int xe^{x^2}\,dx$,

g) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$,

h) $\int \frac{1\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$,

i) $\int \frac{\sin x}{a+b\cos x}\,dx$, $b \neq 0$, $a + b\cos x \neq 0$,

j) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$,

k) $\int \cos x \cdot e^{\sin x}\,dx$,

l) $\int_0^4 (1+\sqrt{x})^{12}dx$,

m) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$,

n) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(\pi - x)dx$.

Antwort: a) $2\ln(1+\sqrt{x})$, b) $\frac{(x^2+2x)^4}{4}$, c) $\frac{-1}{2\,(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}} + C$, falls $n \neq 1$, $\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$ für $n = 1$, d) $\sqrt{2x-3} + C$, e) $\frac{1}{9}(\sqrt{2x^3-3})^3 + C$, f) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$, g) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$, h) $\arcsin(x) + C$, i) $-\frac{1}{b}\ln|a + b\cos x|$, j) $-e^{1/x}$, k) $e^{\sin x}$, l) $438000,84$, Substitution z.B. mit $t = 1 + \sqrt{x}$, m) $\frac{26}{3}$, Substitution mit $t = 2x + 1$ n) -1, Substitution mit $t = \pi - x$

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x \cos x\,dx$,

b) $\int_3^5 \frac{x}{x^2-4}\,dx$,

c) $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$, $a > 0$,

d) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2+2x+1}$,

e) $\int_{-\sqrt{3/5}}^{\sqrt{3/5}} \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$,

f) $\int_0^2 \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^x}$,

Antwort: a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}\ln\frac{21}{5}$, c) $\frac{\pi}{4a}$, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{1}{5}\sqrt{5}\,\pi$,f) $e^2 - 1 + \ln\frac{2}{1+e^2}$

Kapitel 6

Lineare Algebra

6.1 Vektoren

Aufgabe 1

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) $\vec{v_1} + \vec{v_2}$,

b) $\vec{v_1} - \vec{v_2}$,

c) $5 \cdot \vec{v_3} - 2\vec{v_2} + 3 \cdot \vec{v_1}$,

d) $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$,

e) $\vec{v_2} \circ \vec{v_3}$,

f) $||\vec{v_1} + 2\vec{v_2}||$,

g) $\vec{v_1} \circ (\vec{v_2} \times \vec{v_3})$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Volumen, das folgende drei Vektoren aufspannen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Antwort: $V = -45$

6.2 Matrizen

6.2.1 Matrixprodukte

(Bronstein 4.1.4)

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgendes Produkt:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Antwort: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgendes Produkt:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Antwort: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Matrixprodukte $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwort: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 8 & -12 \\ -9 & 12 & -18 \\ -3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgendes Produkt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}.$$

Antwort: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ x+\alpha u & y+\alpha v & z+\alpha z \\ u & v & w \end{pmatrix}$

6.2.2 Determinanten

Aufgabe 1

Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ ist $det(A) = 14$?

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 3 \\ -4x & x \end{pmatrix}$$

Antwort: $x \in \{-7, 1\}$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie,

(i) dass für alle $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: $det(AB) = det(A)det(B)$.

(ii) dass für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: $det(A-\lambda E) = det(A) - \lambda Tr(A) + \lambda^2$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hinweis:
Tr(A) bezeichnet die Summe der Diagonaleinträge der Matrix A und E die Einheitsmatrix.

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Antwort: -3

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Antwort: -10

Aufgabe 5

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: -60

Aufgabe 6

Berechnen Sie folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$$

Antwort: $-ayz - bxz - cxy$

6.2.3 Inverse Matrizen

(Bronstein 4.4.1.4)

Aufgabe 1

Berechnen Sie die inverse Matrix zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Antwort: $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die inverse Matrix zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Antwort: Keine Inverse.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die inverse Matrix zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Antwort: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die inverse Matrix zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Antwort: $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die inverse Matrix zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.3 Lineare Gleichungssysteme

6.3.1 Anwendung von Lösungsverfahren

Aufgabe 1

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3x + 5y = 19, \\ 7x + 5y = 31. \end{cases}$$

Antwort: $x = 3$, $y = 2$.

Aufgabe 2

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 3x + y + 2z = 11, \\ 2x + 3y + z = 11. \end{cases}$$

Antwort: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Aufgabe 3

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x - y + 2z = 8, \\ 3x + 11y - 7z = 6. \end{cases}$$

Antwort: Widerspruch.

Aufgabe 4

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 1, \\ 3x + 2y - 7z = 1, \\ 4x - 3y + 2z = 7. \end{cases}$$

Antwort: Mit $t \in \mathbb{R}$ folgt: $x = t + 1, y = 2t - 1, z = t$.

Aufgabe 5

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + y + 3z - 2t + 3u = 1, \\ 2x + 2y + 4z - t + 3u = 2, \\ 3x + 3y + 5z - 2t + 3u = 1, \\ 2x + 2y + 8z - 3t + 9u = 2. \end{cases}$$

Antwort: Widerspruch.

Aufgabe 6

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 8x + 6y + 5z + 2t = 21, \\ 3x + 3y + 2z + t = 10, \\ 4x + 2y + 3z + t = 8, \\ 3x + 5y + z + t = 15, \\ 7x + 4y + 5z + 2t = 18. \end{cases}$$

Antwort: $x = 3$, $y = 0$, $z = -5$, $t = 11$.

Aufgabe 7

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z + 2t = 2, \\ 2x + 3y + 2z + 5t = 3, \\ 9x + y + 4z - 5t = 1, \\ 2x + 2y + 3z + 4t = 5, \\ 7x + y + 6z - t = 7. \end{cases}$$

Antwort: $x = \frac{1}{7}(8t - 6)$, $y = \frac{1}{7}(1 - 1t)$, $z = \frac{1}{7}(15 - 16t)$

Aufgabe 8

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{5x + 6z} = \dfrac{7}{9}, \\ x + y + z = 128, \\ \dfrac{3y + 4z}{x + 2y} = \dfrac{8}{7}. \end{cases}$$

Antwort: $x = 51$, $y = 76$, $z = 1$.

Aufgabe 9

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10, \\ 3x + 2y + 2z = 1, \\ 5x + 4y + 3z = 4. \end{cases}$$

Antwort: $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$.

6.3.2 Modellierung

Aufgabe 1

Die Differenz zweier Zahlen beträgt 120. Man weiß, dass $33\frac{1}{3}\%$ der einen Zahl 50% der anderen Zahl entspricht. Um welche Zahlen handelt es sich?
Antwort: 360 und 240

Aufgabe 2

Ein Schiff erreicht eine Geschwindigkeit von 18 km/h wenn es mit der Strömung schwimmt. Wenn es gegen die Strömung schwimmt, hat es dagegen nur eine Geschwindigkeit von 14 km/h. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Schiffes und des Wassers.
Antwort: 16 km/h und 2 km/h

Aufgabe 3

Die Fläche eines Rechtecks bleibt unverändert, wenn die Länge um 3 cm verkürzt und die Breite um 1 cm verlängert wird. Sie verändert sich auch nicht, wenn die Länge um 6 cm verkürzt und die Breite um 3 cm verlängert wird. Berechnen Sie die Fläche des Rechtecks.
Antwort: 36 cm^2

Aufgabe 4

Aus 6 Litern blauer Farbe und 10 Litern gelber Farbe sollen zwei grüne Farbmischungen hergestellt werden. Die Mischung „Hellgrün" besteht zu 30% aus blauer und zu 70% aus gelber Farbe, während die Mischung „Dunkelgrün" zu 60% aus blauer und zu 40% aus gelber Farbe besteht. Wie groß sind die Mengen hellgrüner bzw. dunkelgrüner Farbe, die sich aufgrund dieser Mischungsverhältnisse ergeben?
Antwort: Hellgrün: 12L; Dunkelgrün: 4L.

Aufgabe 5

Zwei Autos fahren gleichzeitig aus zwei verschiedenen Städten los. Die beiden Städte sind 210 km voneinander entfernt. Die Autos fahren mit konstanter Geschwindigkeit zur jeweils anderen Stadt. Wenn sie sich treffen, hat das eine Auto noch zwei Stunden Fahrt vor sich, und das andere noch $\frac{9}{8}$ Stunden Fahrt. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Autos.
Antwort: 60 km/h und 80 km/h

6.4 Geometrische Anwendungen im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 1

(i) Welche Bedingung muss $a \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit der Punkt $p = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ vom Punkt $q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ weiter entfernt ist, als vom Punkt $r = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Antwort: keine Lösung in $\mathbb{R}$.

(ii) Seien $p = \begin{pmatrix} 17 \\ 5\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 6 \end{pmatrix}$, $||p - q|| = 2\sqrt{265}$. Bestimmen Sie x.

Antwort: $x = -\sqrt{160} \vee x = \sqrt{1960}$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Gerade $G = \{x \in \mathbb{R}^3 | x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}\}$

die Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 | x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}\}$ schneidet.

Berechnen Sie die Schnittmenge S.

Antwort: $S = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \}$.

Aufgabe 3

Gegeben seien die Ebenen $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}\}$

und $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | (x - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0\}$.

Prüfen Sie, ob E_1 und E_2 parallel sind, oder sich schneiden.
Geben Sie gegebenenfalls die Schnittmenge S an.

Antwort: $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 4

Gegeben seien die Punkte $P(4| - 7|3)$, $Q(3| - 5|4)$, $A(1|0|17)$, $B(2| - 2|7)$ und $C(-1|2|15)$

a) Bestimmen Sie die Gerade g, welche durch die Punkte P und Q geht.

b) Bestimmen Sie die Parameter-, Normalen- und Koordinatenform der Ebene E, in welcher die Punkte A, B und C liegen.

c) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt von g und E.

d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $R(3|2|1)$ von der Ebene E.

e) Gehört R zur Geraden g?

Aufgabe 5 (Zentralabitur 2013 Berlin/Brandenburg (LK))

Gegeben sind die Geraden der Schar

$$g_a \ : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2a + 5 \\ -3 \\ -a \end{pmatrix}$$

mit $t, a \in \mathbb{R}$ und die Gerade

$$h \; : \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

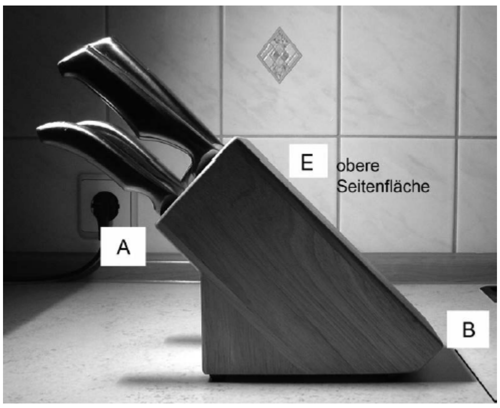
mit $r \in \mathbb{R}$. Es gilt: 1 LE = 1 cm.

a) Zeigen Sie, dass die Gerade h zur Geraden g_{-2} windschief verläuft und berechnen Sie den Abstand dieser beiden Geraden.

b) Die Geraden der Schar g_a liegen in einer Ebene E. Stellen Sie für E eine Gleichung in Koordinatenform auf.

   [Kontrollergebnis: $E : 3x + 5y + 6z = 48$]
   Ermitteln Sie den Schnittpunkt T der Ebene E und der Geraden h. Genau eine der Geraden g_a verläuft ebenfalls durch T. Bestimmen Sie den Parameterwert a für diese Gerade.

   Zur Herstellung eines Messerblocks wurde ein quaderförmiger Holzklotz mit quadratischer Grund- und Deckfläche verwendet. An einer Seite wurde ein Teil schräg abgesägt und ein dreiseitiges Prisma aus Holz angeleimt. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die Arbeitsfläche, auf der der Messerblock steht, in der $x - y$-Ebene liegt. Der Messerblock steht so, dass seine obere Seitenflache in E liegt und $A(11|11|11)$ und $B(-\frac{1}{17}|\frac{123}{17}|2)$ zwei Eckpunkte des Messerblocks sind (siehe Foto).



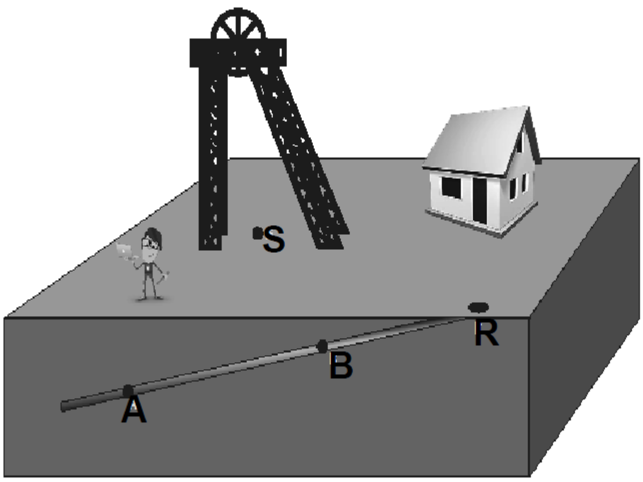
c) Eine Flächendiagonale des ursprünglichen Holzquaders verläuft vom Punkt A zum Punkt B. Geben Sie ihre Länge an. Die Seitenfläche des Messerblocks, in die die Messer gesteckt werden, ist quadratisch. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

d) Auf den Messerblock trifft paralleles Licht, das in Richtung der Messer parallel zur oberen Seitenfläche, die in E liegt, verläuft. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den das einfallende Licht mit der Arbeitsfläche einschließt.

e) Ermitteln Sie die Höhe des Messerblocks (ohne Messer).

Aufgabe 6 (Zentralabitur 2013 Berlin/Brandenburg (GK))

In einem Bergwerk befindet sich ein Tunnel, der geradlinig durch die Punkte $A(73|-16|-24)$ und $B(7|17|-2)$ zum Ausgang R verläuft. Vom Punkt $S(45|10|0)$ werden geradlinig Stollen gegraben, die auf den Tunnel treffen. Die Erdoberfläche befindet sich in der $x-y$-Ebene, 1 LE = 10 m.



a) Bestimmen Sie die Richtung, in die von S aus gegraben werden muss, damit ein Stollen den Punkt A trifft. Berechnen Sie die Länge des Stollens und die Größe des Winkels, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R, an dem der Tunnel an der Erdoberfläche beginnt.

b) Ein zweiter Stollen verlauft vom Punkt S in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3,5 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P, in dem dieser Stollen auf den Tunnel trifft.

c) Vom Punkt S aus soll der kürzeste Stollen gegraben werden, der zum Tunnel führt. Bestimmen Sie die Richtung, in welche gegraben werden muss, und den Punkt K, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft.

d) In 140 m Entfernung vom Punkt B auf der Stecke $\overline{AB}$ soll ein zur Erdoberfläche senkrechter Notausstieg enden. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem die Bohrung an der Erdoberfläche beginnen muss.

Kapitel 7

Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1 Zufälliges Ereignis und Wahrscheinlichkeit

Aufgabe

Wir nehmen einen (fairen) Würfel und ein Tetraeder (beschriftet mit den Zahlen 1 bis 4) und würfeln gleichzeitig mit beiden.

a) Beschreiben Sie den Grundraum Ω.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Augensumme?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme eine Primzahl ist?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Augenprodukt eine Primzahl ist?

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme größer als 4 ist?

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Augenprodukt höchstens 10 ist?

7.2 Kombinatorik

Aufgabe 1

Sie haben 9 verschiedene Farben zur Verfügung. Ihre Aufgabe besteht darin, 7 nebeneinander liegende Felder einzufärben. Wieviele Möglichkeiten haben Sie wenn,

a) keine Einschränkungen bestehen?

b) jedes Feld eine andere Farbe haben soll?

c) benachbarte Felder verschieden gefärbt werden sollen?

d) die beiden äußeren Felder rot sein sollen?

e) 3 Felder rot, 2 blau und der Rest grün sein soll?

f) 3 nebeneinander liegende Felder rot, die anderen beliebig außer rot gefärbt werden sollen?

Aufgabe 2

Ein Student möchte in sein Regal 5 Mathe-, 3 Physik- und 4 Biologiebücher anordnen.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn es keine weiteren Einschränkungen gibt, das heißt alle Bücher unterscheidbar sind?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn alle Bücher unterscheidbar sind, aber die Bücher in den 3 Themenblöcken zusammenbleiben sollen?

c) Im Folgenden gelten die Bücher gleicher Thematik als nicht unterscheidbar. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

   i) die Bücher irgendwie im Regal angeordnet werden sollen?

   ii) die Bücher wieder in den Themenblöcken bleiben sollen?

Aufgabe 3

Wir möchten Wörter mit 5 Buchstaben bilden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

a) alle Buchstaben verschieden sein müssen?

b) wenn es keine Einschränkungen gibt?

c) der erste Buchstabe ein „T“ ist und alle Buchstaben verschieden sein sollen?

Aufgabe 4

Ein Unternehmen wählt einen neuen Vorstand. Dieses Kommitee soll aus 5 Personen bestehen. Als Kandidaten stehen 7 männliche und 6 weibliche Personen zur Auswahl.

a) Wie viele Möglichkeiten zur Auswahl gibt es, falls genau 2 Männer zum Vorstand gehören sollen?

b) Wie viele Möglichkeiten zur Auswahl gibt es, falls höchstens 2 Männer zum Vorstand gehören sollen?

c) Angenommen der Firmenchef ist der älteste der Männer und soll auf jeden Fall zum Vorstand gehören. Wie viele Möglichkeiten zur Auswahl gibt es, falls mehr als 2 Frauen zum Vorstand gehören sollen?

Aufgabe 5

In einer Urne liegen fünf verschiedene Kugeln von denen wir 3 ziehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

a) wir ohne Zurücklegen ziehen?

b) wir mit Zurücklegen ziehen?

7.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 1

Ein Labor bezieht Reagenzgläser von zwei Herstellern, H_1 und H_2. Erfahrungswerte zeigen, dass der Ausschussanteil bei Hersteller H_1 5% beträgt, und der Anteil beschädigter Reagenzgläser bei H_2 8% ist. Das Labor erhält von H_1 350 Reagenzgläser und von H_2 650 Reagenzgläser.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus der gesamten Lieferung zufällig ein einwandfreies Reagenzglas zu ziehen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Reagenzglas vom Hersteller H_2 geliefert wurde?

Antwort: a) $0,9305$, b) $0,7482$

Aufgabe 2

Angenommen auf einer Semestereröffnungsfeier der Universität Potsdam nehmen nur Gäste teil, welche den Brückenkurs Mathematik besucht haben und von denen sich auch 70% gerne an selbigen zurück erinnern. Der Männeranteil unter den Gästen beträgt 45%. Man nimmt an, dass 60% der männlichen Gäste sich gerne an den Brückenkurs erinnern. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

a) Ein zufällig ausgewählter Gast, welcher sich gern an den Brückenkurs erinnert, ist ein Mann.

b) Eine an der Veranstaltung teilnehmende Frau denkt gerne an den Brückenkurs zurück.

Antwort: a) $0,3857$, b) $0,7818$

Aufgabe 3

Bei einem Aufnahmetest zur Universität waren 45% der Teilnehmer Frauen, von denen auch 85% den Test bestanden haben. 60% derjenigen, die scheiterten, waren Männer. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

a) Ein zufällig ausgewählter Teilnehmer besteht den Test.

b) Ein zufällig ausgewählter Teilnehmer, welcher welcher den Test bestanden hat, ist ein Mann.

7.4 Binomialverteilung

Aufgabe 1

Eine Umfrage an der Universität Potsdam hat ergeben, dass 80% der Studenten, welche sich für einen naturwissenschaftlichen Studiengang entschieden haben auch das Fach Mathe mögen (Angabe fiktiv). Angenommen dieser Wert stimmt und wir picken zufällig 10 Studenten aus dieser Gruppe heraus.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

   i) genau 6 Studenten das Fach Mathe mögen.

   ii) mindestens 8 Studenten das Fach Mathe mögen.

   iii) höchstens 2 Studenten das Fach Mathe nicht mögen.

   iv) mehr als 2 aber weniger als 7 Studenten das Fach Mathe mögen.

b) Wie viele Studenten müssten mindestens befragt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99% mindestens einen Studenten zu treffen, der das Fach Mathe mag.

Antwort: a) i) $0,08808$, ii) $0,678$, iii) $0,678$, iv) $0,1208$, b) 3

Aufgabe 2

Es sei $p \in (0,1)$ der Anteil der Studenten der Universität Potsdam, welche am Brückenkurs Mathematik teilgenommen haben. Berechnen Sie p unter der Bedingung, dass die Wahrscheinlichkeit unter 20 (n) zufällig gewählten Studenten der Uni Potsdam genau 6 (k) zu treffen, die am Brückenkurs teilgenommen haben, maximal wird.

Antwort: $\frac{k}{n}$

Aufgabe 3 (Zentralabitur 2013 Berlin/Brandenburg (LK))

Beim Open-Air-Musikfest im Waldstadion kauften 60% der Besucher ihre Eintrittskarten online, 25% bezogen ihre Karten im Vorverkauf, der Rest der Karten wurde an der Abendkasse erworben. Ein Reporter interviewt im Stadion zufällig ausgewählte Besucher und stellt dabei auch Fragen nach der Herkunft der gekauften Karten.

a) Bestimmen Sie die jeweilige Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

   A: Zwei interviewte Besucher haben beide ihre Karten online gekauft.
   B: Die Hälfte von 10 Interviewten haben ihre Karten online gekauft.
   C: Mindestens neun von 10 Interviewten haben ihre Karte online gekauft.

b) Der Reporter möchte nun mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% wenigstens zwei Besucher finden, die ihre Karte an der Abendkasse gekauft haben. Entscheiden Sie begründet, ob es dafür genügt, 24 Besucher zu interviewen.

c) Unter den online gekauften Karten liegt der Anteil der von Frauen gekauften Karten bei 45%. Der Anteil der Frauen unter allen gezählten Besuchern liegt bei 35%. Stellen Sie diesen Sachverhalt geeignet dar (Baumdiagramm, Vierfeldertafel o. ä.). Der Reporter hat für sein Interview eine Frau ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Frau ihre Karte online gekauft hat.

d) Vor der letzten Zugabe verlassen voneinander unabhängig insgesamt 10% der Besucher das Waldstadion. Im mittleren Rang hatten zuvor 2200 Besucher gesessen. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei der letzten Zugabe dort noch höchstens 2000 Besucher sitzen.

e) Vor dem Verkauf wurden jeweils 30 Eintrittskarten blau bzw. rot markiert. Am Schluss des Konzertes werden die Besitzer farbig markierter Eintrittskarten auf die Bühne gebeten. Insgesamt kommen jedoch nur vier auf die Bühne. Mit einem großen (Laplace-) Würfel, bei dem 2 Seiten blau und 4 Seiten rot gefärbt sind, soll mit einem Wurf entschieden werden, welche Farbe Freikarten für das nächste Konzert gewinnt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als zwei Besitzer farbiger Karten je eine Freikarte gewinnen.

Aufgabe 4 (Zentralabitur 2013 Berlin/Brandenburg (GK))

Bei einem Fußballturnier haben die Mannschaften von Altenberg (A) und Burghausen (B) das Finale erreicht.

a) Für die Startelf wählt der Trainer der Mannschaft A einen von drei Torhütern und 10 von 15 Feldspielern aus. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die der Trainer hat, die Mannschaft zusammenzustellen.

b) Erfahrungsgemäß wird jeder der 11 Spieler (Torwart sowie 10 Feldspieler) mit einer Wahrscheinlichkeit von 6% ausgewechselt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

   C: Es wird kein Spieler ausgewechselt.
   D: Es wird genau ein Spieler ausgewechselt.
   E: Es werden zwei oder drei Spieler ausgewechselt.

   Da das Spiel auch nach der Verlängerung noch unentschieden steht, müssen beide Mannschaften ins Elfmeterschießen. Dafür wird angenommen, dass jeder Spieler von Mannschaft A eine Trefferquote von 80% und jeder Spieler von Mannschaft B eine Trefferquote von 75% hat.

c) Ermitteln Sie, wie viele Elfmeter Mannschaft A mindestens schießen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einen Treffer zu erzielen.

d) Beide Mannschaften schießen jeweils fünfmal. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Elfmeterschießen 4 : 4 endet. Danach treten die Schützen jeder Mannschaft paarweise an. Ein Spieler jeder Mannschaft schießt einen Elfmeter. Wenn eine Mannschaft dabei in Führung geht, hat sie das Finale gewonnen, ansonsten ist das nächste Paar dran.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bereits nach dem ersten Paar Mannschaft B das Finale gewonnen hat oder noch keine Entscheidung gefallen ist.

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach drei angetretenen Paaren noch keine Entscheidung gefallen ist.

Viel Spaß und viel Erfolg beim Studium!!!