Mathematik für Naturwissenschaftler

Prof. Dr. Matthias Holschneider

Dipl. Math. Bernhard Fiedler

Dr. Marcel Fuhrmann

21. Mai 2017

Institut für Mathematik, Universität Potsdam

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

Die Grundlagen aller Naturwissenschaften bilden mathematische Gesetze, wodurch sich die Mathematik in den ersten Semestern als Grundlagenfach als unvermeidbar darstellt. Um den Einstieg in das Studium zu erleichtern ist das vorliegende Skript sehr ausführlich geschrieben und beinhaltet insbesondere viele Beispielaufgaben mit dem entsprechenden Lösungsweg

Wir beginnen in Kapitel 2 damit, zunächst einige Grundbegriffe der Logik wie Aussagen zu erläutern, definieren im weiteren Verlauf die Verknüpfungen von Aussagen und gehen auf deren wichtigste Eigenschaften ein. In Kapitel 3 folgt die Mengenlehre. Auch hier schauen wir uns Operationen mit Mengen an und gehen auf einige spezielle Mengen wie zum Beispiel dem kartesischen Produkt ein.

Kapitel 3 befasst sich sich mit dem Rechnen mit reellen Zahlen und stellt zunächst eine Wiederholung aus der Schule dar. Es werden Potenzen, Wurzeln, Beträge von reellen Zahlen betrachtet und auf den Logarithmus sowie deren Gesetze eingegangen. Dann werden das Summen- und Produktzeichen definiert, wobei die Fakultät als spezielles Produkt eingeführt wird und auf Grundlage dessen kommen wir dann zum Binomialkoeffizienten, dem Pascalschen Dreieck und letztlich zum binomischen Lehrsatz.

Kapitel 4 geht es um das Thema „Funktionen“, welche zum Beispiel zur Modellierung biologischer Sachverhalte unausweichlich sind. Zunächst betrachten wir Relationen, kommen dann zum allgemeinen Funktionsbegriff und ersten Eigenschaften und untersuchen dann elementare Funktionen wie zum Beispiel Polynome und Exponentialfunktionen. Weiterhin werden in diesem Kapitel auch Umkehrfunktionen betrachtet und es wird auf einige konkrete Beispiele wie die Logarithmusfunktion näher eingegangen.

Kapitel 5 beinhaltet eines der wichtigsten Themengebiete der Mathematik und befasst sich mit der „Differentialrechnung“. Es gibt zunächst die formale Definition von Differenzierbarkeit über den Differentialquotienten, dann folgen die elementaren Ableitungsregeln, welche auch größtenteils aus der Schule bekannt sind. Des Weiteren werden lokale Extrema und Wendepunkte untersucht und Taylorpolynome und -reihen eingeführt. Einige fortführende Themen wie die Regel von L‘Hospital und die Ableitung der Umkehrfunktion befinden sich außerdem im Anhang.

In Kapitel 6 wird das Thema „Integralrechnung“ behandelt. Auch hier gibt zunächst die formale Definition des sogenannten Riemann-Integrals, allerdings vereinfacht für stetige Funktionen. Es folgen Stammfunktionen und der Hauptsatz der Analysis, welcher uns zum einen den Zusammenhang der Differential- und Integralrechnung zeigt und es ermöglicht bestimmte Integrale bei Kenntnis einer Stammfunktion zu berechnen. Weiterhin werden einige wichtige Integrationsmethoden untersucht und uneigentliche Integrale betrachtet. Abschließend folgen noch einige Anwendungen.

Kapitel 1

Logik und Mengenlehre

1.1 Logik

1.1.1 Aussagen

Sowohl im Alltag als auch in der Wissenschaft ist es erforderlich, Sachverhalte der objektiven Realität gedanklich widerzuspiegeln und sprachlich auszudrücken. Diesem Zecke dienen in unserem Alltag vorwiegend Aussagesätze.
In der Wissenschaft werden diese Ausdrucksmittel vor allem durch mathematische Symbole ergänzt und komplettiert. Wir machen dazu die folgende Definition.

Definition 1.1.1 (Aussage): Unter einer Aussage versteht man eine gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts der objektiven Realität mit Hilfe der Sprache und der mathematischen Symbolik. Eine Aussage heißt wahr genau dann, wenn sie einen Sachverhalt richtig (adäquat) widerspiegelt. Andernfalls heißt die Aussage falsch.

Bemerkung 1.1.2: Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch. Es gibt also weder Aussagen, die weder wahr noch falsch sind, noch Aussagen, die sowohl wahr als auch falsch sind.

Beispiel 1.1.3: Wir betrachten zunächt einige Aussagen im Alltag:

a) „Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland.“ Diese Aussage ist natürlich wahr.

b) „Jeder Mensch hat 32 Zähne.“ Die Aussage ist falsch, da es sicherlich auch Menschen mit weniger Zähnen gibt.

Nun wollen wir uns noch einige Aussagen aus dem Bereich der Mathematik anschauen:

a) „7 ist eine Primzahl.“ Diese Aussage ist wahr (wie wir natürlich bereits aus der Grundschule wissen).

b) „π ist eine natürliche Zahl." Diese Aussage ist falsch.

c) „$5 < 8$ " Diese Aussage ist natürlich wahr.

d) „$x = 4$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 - 5x + 4 = 0$" Diese Aussage ist wahr, wie man durch Einsetzen sehr leicht nachprüfen kann.

e) „Jede gerade Zahl größer als 2 ist als Summe von 2 Primzahlen darstellbar." Diese Aussage ist entweder wahr oder falsch und gehört zu den ungelösten mathematischen Problemen.

f) „Jede natürliche Zahl, die durch 21 teilbar ist, ist auch durch 7 teilbar." Diese Aussage ist wahr.

g) „Jede natürliche Zahl, die durch 7 teilbar ist, ist auch durch 21 teilbar." Diese Aussage ist falsch, ein Gegenbeispiel wäre 14.

Beispiel 1.1.4: Natürlich gibt es auch Sätze, die keine Aussage darstellen. Das liegt daran, dass wir ihr keinen Wahrheitswert zuordnen können. So ist zum Beispiel der Satz

„Nachts ist es kälter als draussen."

keine Aussage. Ein Gegenbeispiel aus dem Bereich der Mathematik wäre der Term

$$5 - 3x,$$

welcher auch keine Aussage darstellt.

1.1.2 Verknüpfung von Aussagen

Mit Hilfe gewisser Bindewörter (oder; und; wenn ..., dann; genau dann, wenn) kann man zwei Aussagen zu einer neuen Aussage verknüpfen. Ferner kann man durch Negation (Verneinung) einer gegebenen Aussage eine neue Aussage erzeugen.
Dabei ist es belanglos, ob zwischen den gegebenen Aussagen ein inhaltlicher Zusammenhang besteht oder nicht. Insbesondere hängt der Wahrheitswert (WW) der erzeugten Aussage nur von den Wahrheitswerten der gegebenen Aussagen und von der Art der Verknüpfung ab, nicht aber von ihrer inhaltlichen Bedeutung.
Es seien p und q zwei beliebige Aussagen. Dann bezeichnet

1. $\bar{p}$ (lies: „Nicht p") die *Negation* (das logische Gegenteil) von p.
   $\bar{p}$ ist genau dann wahr, wenn p falsch ist und umgekehrt.

2. $p \wedge q$ (lies: „p und q") die *Konjunktion* von p und q.
   $p \wedge q$ ist genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind.

3. $p \vee q$ (lies: „p oder q“) die *Disjunktion* von p und q.
   $p \vee q$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen p und q wahr ist.

4. $p \Rightarrow q$ (lies: „wenn p, dann q“) die *Implikation* von p und q.
   $p \Rightarrow q$ ist genau dann falsch, wenn die Aussage p wahr, aber q falsch ist, sonst also immer wahr.
   Aus der Aussage p folgt die Aussage q. Man bezeichnet p als hinreichende Bedingung für q und q als notwendige Bedingung für p.
   Die Implikation lässt sich leicht einprägen an einem Beispiel aus dem Alltags. Wir betrachten die Aussagen: p: „Die Ampel ist rot.“ $\longrightarrow$ wahr
   q: „Ich bleibe stehen.“ $\longrightarrow$ wahr
   Die Implikation wird nur falsch, sofern die Aussage q negiert wird. Man erhält dann: „Die Ampel ist rot und ich bleibe folglich nicht stehen.“

5. $p \Leftrightarrow q$ (lies: „p äquivalent q “ oder „genau dann p, wenn q“) die *Äquivalenz* von p und q.
   $p \Leftrightarrow q$ ist genau dann wahr, wenn die Aussagen p und q den selbsen Wahrheitswert haben, wenn also p und q entweder beide wahr oder beide falsch sind.

Beispiel 1.1.5: Wir betrachten die Aussagen

p: „Die Zahl 16 ist durch 3 teilbar.“, welche falsch ist und

q: „Die Zahl 16 ist eine gerade Zahl.“, welche wahr ist. Dann ist

$\bar{p}$: „Die Zahl 16 ist nicht durch 3 teilbar.“ (wahr),

$\bar{q}$: „Die Zahl 16 ist keine gerade Zahl.“ (falsch),

$p \wedge q$: „Die Zahl 16 ist durch 3 teilbar und gerade.“ (falsch)

$p \vee q$: „Die Zahl 16 ist durch 3 teilbar oder gerade.“ (wahr)

$p \Rightarrow q$: „Wenn die Zahl 16 durch 3 teilbar ist, dann folgt daraus, dass sie gerade ist.“ (wahr) sowie

$p \Leftrightarrow q$: „Die Zahl 16 ist durch 3 teilbar genau dann, wenn 16 gerade ist.“ (falsch)

Es ist üblich, die Wahrheitswerte zusammengesetzter Aussagen in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen in sogenannten Wahrheitstafeln darzustellen. Wir benutzen die Abkürzungen „w“ für „wahr“ und „f“ für „falsch“.

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q = \bar{p} \vee q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Definition 1.1.6 (Logische Ausdrücke): Unter einem logischen Ausdruck versteht man die Verknüpfung von logischen Variablen mit Hilfe der zuvor betrachteten Operationen und Klammern, die die Reihenfolge der Abarbeitung der Operationen regeln. Zwei Aussageverbindungen heißen logisch äquivalent, falls ihre Wahrheitstafeln werteverlaufsgleich sind. Diese können dann logisch als völlig gleichwertig betrachtet werden.

Bemerkung 1.1.7: Die Äquivalenz von logischen Ausdrücken bildet die Grundtechnik für mathematische Beweise.

Beispiel 1.1.8: $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) = (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$

Beweis: Wir betrachten die Wahrheitstafeln der logischen Ausdrücke. Es ist

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee q$	$p \vee \bar{q}$	$(\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w

sowie

p	q	$p \Rightarrow q = \bar{p} \vee q$	$q \Rightarrow p = p \vee \bar{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

□

Im Folgenden kommen wir zu einigen Rechenregeln für logische Ausdrücke, welche sich mit Hilfe von Wahrheitstafeln leicht beweisen lassen. Dies überlassen wir an dieser Stelle allerdings dem interessierten Leser.

a) Kommutativgesetze

$$\begin{aligned} p \wedge q &= q \wedge p \\ p \vee q &= q \vee p \end{aligned}$$

b) Assoziativgesetze

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \wedge r &= p \wedge (q \wedge r) = p \wedge q \wedge r \\ (p \vee q) \vee r &= p \vee (q \vee r) = p \vee q \vee r \end{aligned}$$

c) Distributivgesetze

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &= (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) &= (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned}$$

d) Gesetze zur Negation

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{p})} &= p \\ \overline{p \wedge q} &= \bar{p} \vee \bar{q} \\ \overline{p \vee q} &= \bar{p} \wedge \bar{q} \end{aligned}$$

e) Transitivität

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

1.1.3 Aussageformen

Definition 1.1.9: Sätze mit einer oder mehreren Variablen aus einer gewissen Grundmenge (z.B. die Menge der Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$) heißen Aussageformen, wenn Sie bei spezieller Wahl der Variablen in eine Aussage übergehen. Die Grundmenge bezeichnet man auch als Variablenbereich.

Bemerkung 1.1.10: Als Symbol für Aussageformen benutzen wir $p(x)$. Wir sagen $p(x)$ ist Aussageform mit der Variablen x. Der Wahrheitswert von $p(x)$ hängt von der Variablen x ab.

Beispiel 1.1.11: Wir betrachten die Aussageform $p(x) : 2x < x + 2$. Als Variablenbereich wählen wir $\mathbb{N}$. Dann geht die Aussageform für $x = 1$ in eine wahre Aussage und für $x > 1$ in eine falsche Aussage über.

1.1.4 Quantoren

Um die Notation zu erleichtern, führen wir die folgenden Quantoren ein.

1. EXISTENZQUANTOR: Es existiert ein Element x einer Menge, so dass eine Aussage $p(x)$ gilt (wahr ist), die von diesem x abhängt.

   $$\text{kurz:} \quad \exists x \in M : p(x) \text{ } (M \text{ ist eine Menge})$$

   Beispiel: $\exists x \in \mathbb{N} : x - 2 = 0$.

2. ALLQUANTOR: Für alle Elemente x einer Menge gilt eine Aussage $p(x)$, die von diesem x abhängt.

   $$\text{kurz:} \quad \forall x \in M : p(x)$$

   Beispiel: $\forall x \in \mathbb{N} : x > 0$.

1.2 Mengenlehre

1.2.1 Definitionen und Beispiele

Definition 1.2.1 (Menge (nach Georg Cantor)): Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung von einzelnen wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen (oder zu einer Einheit). Die zu einer Menge gehörenden Objekte, aus denen sich die Menge zusammensetzt, werden Elemente der Menge genannt.

Bemerkung 1.2.2:

- Als Variable für Mengen werden gewöhnlich große, für die Elemente kleine Buchstaben benutzt. Ist x ein Element der Menge M, so schreibt man $x \in M$.
- $x \notin M$ bedeutet, dass x kein Element der Menge ist.
- Je nachdem, ob eine Menge endlich oder unendlich viele Elemente enthält, spricht man auch von einer endlichen oder unendlichen Menge.
- Eine Menge, die keine Elemente enthält wird als leere Menge bezeichntet und man schreibt $M = \emptyset$.
- Zwei Mengen sind gleich, wenn beide Mengen genau die gleichen Elemente besitzen.

Beispiel 1.2.3: Mengen im Alltag

a) Die Buchstaben eines Alphabets.

b) Die Menge der Biologie-Studenten an einer bestimmten Hochschule.

Beispiel 1.2.4: Mengen im Bereich der Mathematik

a) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

b) Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

c) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid \ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

d) Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

e) Alle natürlichen Zahlen, die der Bedingung $3 < n < 10$ genügen, bilden eine Menge M.

1.2.2 Beschreibung von Mengen

Die einfachste Art, eine Menge zu beschreiben, ist die Aufzähung ihrer Elemente. Dabei schließt man die Liste der Elemente in geschweifte Klammern ein.

Beispiel 1.2.5: Wir betrachten erneut die Menge M aller natürlichen Zahlen, die der Bedingung $3 < n < 10$ genügen. Dann können wir diese Menge auch wie folgt darstellen: $M = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Beispiel 1.2.6: Wir betrachten die Menge $\mathbb{L}$ aller reellwertigen Lösungen der Gleichung

$$(x-2)(x+3)(x^2-16)(x^2+1) = 0$$

Durch Lösen der Gleichung (man denke an den Satz: „Ein Produkt wird „0“, wenn mindestens einer der Faktoren „0“ wird“) erhalten wir $\mathbb{L} = \{-4, -3, 2, 4\}$.

Beispiel 1.2.7: Die Menge K der ganzen Zahlen mit der Bedingung $g^2 < 10$. Dann ist $K = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$

Das waren alles endliche Mengen.

Bemerkung 1.2.8: Bei unendlichen Mengen gibt man einige Elemente an und deutet durch Punkte ... die erforderliche Fortsetzung an.

Beispiel 1.2.9: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Beispiel 1.2.10: $Q = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ ist die Menge der Quadratzahlen.

Bemerkung 1.2.11: Wie wir zuvor auch schon bei dem zweiten Beispiel gesehen haben, kann es bei unendlichen Mengen zu Mißverständnissen kommen. Um dieses Dilemma zu umgehen, gibt es noch die Möglichkeit die Menge durch die charakteristischen Eigenschaften ihrer Elemente zu beschreiben. $M = \{x \mid \text{Eigenschaft}\}$ sprich: M ist Menge aller x mit der Eigenschaft ... .

Beispiel 1.2.12: $M = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge 3 < n < 10\}$

1.2.3 Relationen zwischen Mengen

Definition 1.2.13: Zwei Mengen A und B heißen gleich, geschrieben $A = B$, genau dann, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.
Des Weiteren heißt eine Menge A Teilmenge einer Menge B, geschrieben $A \subseteq B$, genau dann, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist.

Bemerkung 1.2.14: Die obige Definition einer Teilmenge schließt nicht aus, dass die beiden Mengen gleich sind. Soll dies mit ausgeschlossen werden, das heißt dass B ein zusätzliches Element besitzt, welches nicht in A vorhanden ist, so nennt man A eine *echte* Teilmenge von B, geschrieben $A \subset B$.

Beispiel 1.2.15: Es gilt die folgende Hierarchie

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.2.16: Wir betrachten die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2,5) = 0\} \\ M_2 &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (2x-5) \cdot (x^2+x-2) = 0\} \\ M_3 &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 2x^2 - 7x + 5 = 0\}. \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass die Mengen auch in der folgenden Form geschrieben werden können.

$$\begin{aligned} M_1 &= \{-2;\ 1;\ 2,5\} \\ M_2 &= \{-2;\ 1;\ 2,5\} \\ M_3 &= \{1;\ 2,5\}. \end{aligned}$$

Somit gilt $M_1 = M_2$ sowie $M_3 \subset M_1$.

Bemerkung 1.2.17: Es ist $A \subseteq A$ sowie $\emptyset \subset A$.
Ferner gilt $A \subset B$ und $B \subset C \implies A \subset C$ sowie $A \subseteq B$ und $B \subseteq A \implies A = B$.

1.2.4 Operationen mit Mengen

Vereinigung von A und B: Unter der Vereinigung von A und B, geschrieben $A \cup B$ versteht man die Menge der Elemente, die mindestens einer der beiden Mengen A *oder* B angehört, das heißt

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

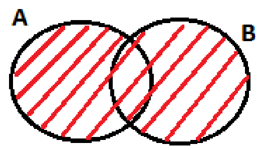

Abbildung 1.1: Die Vereinigung von A und B entspricht dem rot schraffierten Bereich.

Durchschnitt von A und B: Unter dem Durchschnitt von A und B, geschrieben $A \cap B$ versteht man die Menge der Elemente, die sowohl der Menge A *und* der Menge B angehören, das heißt

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

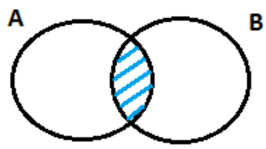

Abbildung 1.2: Der Durchschnitt von A und B entspricht dem blau schraffierten Bereich.

Bemerkung 1.2.18: Zwei Mengen A, B heißen *disjunkt (elementefremd)*, wenn es kein Element gibt, das sowohl in A als auch in B enthalten ist, d.h. $A \cap B = \emptyset$.

Differenz von A und B: Unter der Differenz von A und B, geschrieben $A \backslash B$ versteht man die Menge der Elemente, die zur Menge A *aber nicht* der Menge B angehören, das heißt

$$A \backslash B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

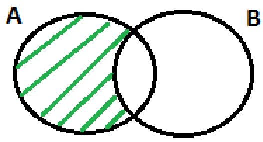

Abbildung 1.3: Die Differenz von A und B entspricht dem grün schraffierten Bereich.

Symmetrische Differenz von A und B: Unter der symmetrischen Differenz von A und B, geschrieben $A \triangle B$ versteht man die Menge der Elemente, bei der aus der Menge $A \cup B$ die Elemente entfernt wurden, die zu A und B gehören, die also genau einer der Mengen A und B angehören.

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

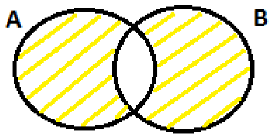

Abbildung 1.4: Die symmetrische Differenz von A und B entspricht dem gelb schraffierten Bereich.

Beispiel 1.2.19: Wir betrachten die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $B = \{2, 4, 6, 7\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ A \cap B &= \{2, 4, 6\} \\ A \backslash B &= \{1, 3, 5\} \\ B \backslash A &= \{7\} \\ A \triangle B &= \{1, 3, 5, 7\} \end{aligned}$$

1.2.5 Kartesisches Produkt und Potenzmenge

Definition 1.2.20: Unter dem kartesischen Produkt $A \times B$ versteht man die Menge aller geordneten Zahlenpaare $(a,\ b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$, das heißt

$$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Beispiel 1.2.21: $\{x, y, z\} \times \{1, 2\} = \{(x, 1); (x, 2); (y, 1); (y, 2); (z, 1); (z, 2)\}$

Beispiel 1.2.22: Während durch $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Punkte in der Ebene beschrieben wird, erhalten wir durch

$$[a, b] \times [c, d]$$

ein Rechteck in der Ebene.

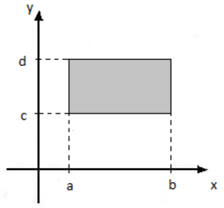

Abbildung 1.5: Rechteck als kartesisches Produkt

Außerdem ergibt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ ein Gitternetz.

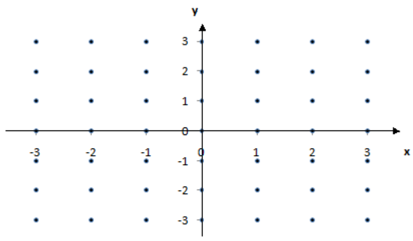

Abbildung 1.6: Gitternetz in der Ebene

Definition 1.2.23: Unter der Potenzmenge $\mathcal{P}$ einer Menge A versteht man die Menge aller Teilmengen von A, das heißt

$$\mathcal{P}(A) = \{C \mid C \subseteq A\}$$

Beispiel 1.2.24: Sei $A = \{a, b, c\}$. Dann ist

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

Bemerkung 1.2.25: Für jede Menge A gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ und $A \in \mathcal{P}(A)$.

Definition 1.2.26: Besitzt eine Menge A nur endlich viele Elemente, dann heißt die Anzahl der Elemente die Kardinalzahl von A, geschrieben $|A|$.

Beispiel 1.2.27: Sei $A = \{a, b, c\}$. Dann ist $|A| = 3$.

Bemerkung 1.2.28: Diese Bezeichnung benötigen wir vor allem im Kapitel Wahrscheinlichkeitstheorie, um den Begriff der klassischen Wahrscheinlichkeit zu definieren.

Bemerkung 1.2.29: Für die Potenzmenge einer Menge A gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, wobei $|A| = n$.

Beispiel 1.2.30: Sei $A = \{a, b, c\}$. Dann ist $n = |A| = 3$ und somit $|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$, was auch ersichtlich wird, wenn man sich die Menge nochmals anschaut

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

1.2.6 Intervalle

Unter einem Intervall versteht man eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dabei unterscheiden wir zwischen

a) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

b) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (offenenes Intervall)

c) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (links offenes Intervall)

d) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (rechts offenes Intervall)

Beispiel 1.2.31: Die Menge

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 9\right\}$$

kann zum Beispiel auch als abgeschlossenes Intervall geschrieben werden. Es ist

$$A = [-3; 3].$$

Im Gegensatz dazu ergibt

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 9\right\}$$

das offene Intervall

$$B = (-3; 3).$$

Kapitel 2

Rechnen mit reellen Zahlen

In diesem Kapitel wiederholen wir einige Grundbegriffe zum Rechnen mit reellen Zahlen, welche schon aus der Schule bekannt sein müssten und erweitern diese durch neue wie zum Beispiel das Summenzeichen.

2.1 Beträge, Potenzen und Logarithmen

Im Folgenden sei $a \in \mathbb{R}$.

Definition 2.1.1: Unter dem Betrag von a versteht man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Der Betrag einer Zahl ist also immer positiv oder „0“.

Beispiel 2.1.2: Sei $a = 2$. Dann ist $|a| = |2| = 2$. Allerdings gilt auch für $a = -2$, dass $|a| = |-2| = 2$.

Bemerkung 2.1.3: Es folgen einige Rechenregeln für Beträge. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.

i) $|-a| = |a|$

ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

iii) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$

iv) $\sqrt{a^2} = |a|$

v) $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \iff a = 0$.

Definition 2.1.4: Die n-te Potenz einer reellen Zahl ist für $n \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert.

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}}$$

Bemerkung 2.1.5: Für beliebige $n \in \mathbb{R}$ wird a^n für $a > 0$ mit Hilfe der eulerschen Zahl e und dem natürlichen Logarithmus definiert.

$$a^n = e^{\ln(a^n)} = e^{n \cdot \ln(a)}$$

Genaueres dazu folgt im weiteren Verlauf des Skriptes.

Bemerkung 2.1.6 (Potenzgesetze): Es gelten die folgenden Rechenregeln im Umgang mit Potenzen.

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \end{aligned}$$

Ferner gilt für $a \neq 0$, dass

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Beispiel 2.1.7: Wir betrachten den Term

$$\frac{4a^2 \cdot b^4}{2a^4 \cdot b^{-3}}$$

und wollen diesen mit Hilfe der Potenzgesetze vereinfachen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{4a^2 \cdot b^4}{2a^4 \cdot b^{-3}} &= 2a^{2-4} \cdot b^{4-(-3)} \\ &= 2a^{-2}b^7 \\ &= \frac{2b^7}{a^2} \end{aligned}$$

Bemerkung 2.1.8 (Wurzeln): Wurzeln sind definiert als spezielle Potenzen. Es gilt zunächst für $a > 0$

$$\sqrt[m]{a} = a^{1/m}, \qquad \sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$$

Ferner gilt $\sqrt[2]{a} = a^{1/2} = \sqrt{a}$ und für $a = 0$, dass $\sqrt[m]{0} = 0$.

Beispiel 2.1.9: Wir betrachten die Addition und Subtraktion von Wurzeln.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{50} - \sqrt{8} - \sqrt{72} + \sqrt{18} &= \sqrt{2 \cdot 25} - \sqrt{2 \cdot 4} - \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 9} + \sqrt{2 \cdot 9} \\
&= \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \\
&= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 3 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 2.1.10 (Rationalmachen des Nenners): Wir vereinfachen den folgenden Ausdruck, in dem wir den Wurzelterm im Nenner mit Hilfe der binomischen Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

rational machen.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{20} - 2}{\sqrt{5} + 2} &= \frac{(\sqrt{20} - 2)(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \\
&= \frac{\sqrt{100} - 2\sqrt{20} - 2\sqrt{5} + 4}{5 - 4} \\
&= 14 - 6\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Definition 2.1.11: Unter dem Logarithmus x einer positiven reellen Zahl a zu einer Basis $b \in \mathbb{R}^+$ mit $b \neq 1$ versteht man die reelle Zahl, welche man mit b potenzieren muss, um a zu erhalten. Es ist also

$$b^x = a \iff x = \log_b(a). \tag{2.1.1}$$

Bemerkung 2.1.12: Der Logarithmus zur Basis e, also zur Eulerschen Zahl, wird als natürlicher Logaritmus bezeichnet, es ist $\log_e a = \ln(a)$. Ferner folgt aus Gleichung (2.1.1), dass

$$a = b^{\log_b(a)}.$$

Weiterhin gilt für beliebige Basen, dass $\log_b(1) = 0$ sowie $\log_a(a) = 1$ und insbesondere $\ln(e) = 1$.

Beispiel 2.1.13:

$$2 = \log_x(25) \iff x^2 = 25 \implies x = 5 \quad (x = -5 \text{ entfällt, da } x > 0)$$

Beispiel 2.1.14:

$$2 = \log_3(x) \iff 3^2 = x \implies x = 9$$

Bemerkung 2.1.15 (Basiswechsel): Es gilt

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)},$$

das heißt wir können die Berechnung von Logarithmen beliebiger Basis auf Berechnungen des natürlichen Logarithmus zurück führen. Anzumerken ist natürlich noch, dass diese Formel auch für andere Basen gilt, allerdings werden sich unsere Berechnungen im weiteren Verlauf auf den natürlichen Logarithmus beschränken.

Bemerkung 2.1.16 (Logarithmusgesetze): Aus der Definition des Logarithmus und den Potenzgesetzen lassen sich die folgenden Rechenregeln im Umgang mit dem (natürlichen) Logarithmus herleiten.

a) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

b) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

c) $\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln(a)$

Da diese Gesetze immer wieder benötigt werden, sollte man sie sich unbedingt einprägen!!!

Beispiel 2.1.17:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{16 \cdot x^3}{e^2}\right) &= \ln(16 \cdot x^3) - \ln(e^2)\\ &= \ln(16) + \ln(x^3) - 2\underbrace{\ln(e)}_{=1}\\ &= \ln(2^4) + 3 \cdot \ln(x) - 2\\ &= 4\ln(2) + 3\ln(x) - 2\end{aligned}$$

Beispiel 2.1.18: Lösen von Exponentialgleichungen (Dies werden wir insbesondere bei der Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen benötigen)

$$e^x = 2 \Longrightarrow \ln(e^x) = \ln(2) \Longrightarrow x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = \ln(2) \Longrightarrow x = \ln(2)$$

Beispiel 2.1.19: Analog können wir nun auch Logarithmusgleichungen lösen, wie zum Beispiel die folgende.

$$\begin{aligned}\ln(x^2-4) - \ln(x-2) = 2 &\overset{x>2}{\Longrightarrow} \ln\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = 2 \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}\right) = 2\\ &\Longrightarrow \ln(x+2) = 2 \Longrightarrow x+2 = e^2\\ &\Longrightarrow x = e^2 - 2\end{aligned}$$

Dies ist auch tatsächlich eine Lösung der Gleichung, da $e^2 - 2 > 2$.

2.2 Summen und Produkte

Definition 2.2.1: Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ reelle Zahlen. Wir definieren

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n =: \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

(Sprich: „Die Summe von $i = 1$ bis n der a_i“).

i wird als Summationsindex bezeichnet. Bei der Zahl, die unter dem Summenzeichen ($\sum$) steht, beginnt die Summe. Die obere Grenze befindet sich über dem Summenzeichen.

Beispiel 2.2.2: Wir möchten mittels Summenzeichen die Summe der natürlichen Zahlen von 4 bis 21 darstellen. Natürlich könnten wir auch schreiben

$$4 + 5 + \ldots + 21,$$

aber wesentlich eleganter ist doch

$$\sum_{i=4}^{21} i.$$

Bemerkung 2.2.3: Die folgenden Rechengesetze benötigt man im Umgang mit dem Summenzeichen.

a) $\sum_{i=n}^{m} a_i + \sum_{i=n}^{m} b_i = \sum_{i=n}^{m} (a_i + b_i)$ (Additivität)

b) $\sum_{i=n}^{m} (ca_i) = c \cdot \sum_{i=n}^{m} a_i$ für $c \in \mathbb{R}$ (Homogenität)

c) $\sum_{i=l}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} a_i = \sum_{i=l}^{m} a_i$ für $l \leq n < m$ (Zerlegungsformel)

d) $\sum_{i=l}^{n} a_i = \sum_{i=l+k}^{n+k} a_{i-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (Indexverschiebung)

Bemerkung 2.2.4: Analog zum Summenzeichen wird auch das Produktzeichen definiert. Es ist

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Beispiel 2.2.5: Wir schauen uns nun einige spezielle Summen an.

a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\sum\limits_{i=1}^{n} a = n \cdot a$.

b) Für die Summe der natürlichen Zahlen gilt

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Diese Formel geht auf Carl Friedrich Gauß zurück, wobei die „Legende“ besagt, dass er aufgrund von fehlhaften Betragen während des Unterrichts die Aufgabe bekam, die Zahlen von 1 *bis* 100 *zu summieren. Dabei stieß er auf diesen Zusammenhang. Die genaue Vorgehensweise findet der interessierte Leser am Ende des Skriptes im Anhang.*

2.3 Pascalsches Dreieck und binomischer Lehrsatz

Definition 2.3.1: Unter dem Begriff n-Fakultät, geschrieben $n!$ versteht man bei einer natürlichen Zahl n das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen, das heißt

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n =: n!$$

für $n \in \mathbb{N}$. Ferner definiert man $0! = 1$.

Beispiel 2.3.2:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Bemerkung 2.3.3: Als eine direkte Folgerung aus der Definition erhalten wir

$$n! = n \cdot (n-1)!.$$

Beispiel 2.3.4: Es ist

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

aber analog geht die Berechnung auch wie folgt

$$4! = 4 \cdot \underbrace{3!}_{=6} = 24.$$

Definition 2.3.5: Unter dem Begriff des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, gelesen n über k, versteht man bei natürlichen Zahlen n und k

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Ferner definiert man $0! = 1$.

Bemerkung 2.3.6: Es gilt

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

c) $\binom{n}{k} = 0$, falls $k > n$.

Bemerkung 2.3.7: Man findet die Binomialkoeffizienten außerdem im sogenannten Pascalschen Dreieck und auch ein weiterer interessanter Zusammenhang wird ersichtlich

n	$(a+b)^n$	$\binom{n}{k}, \quad k = 1, 2 \ldots, n$
0	1	$\binom{0}{0} = 1$
1	$1a + 1b$	$\binom{1}{0} = 1 \;\; \binom{1}{1} = 1$
2	$1a^2 + 2ab + 1b^2$	$\binom{2}{0} = 1 \;\; \binom{2}{1} = 2 \;\; \binom{2}{2} = 1$
3	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	$\binom{3}{0} = 1 \;\; \binom{3}{1} = 3 \;\; \binom{3}{2} = 3 \;\; \binom{3}{3} = 1$
4	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	$\binom{4}{0} = 1 \;\; \binom{4}{1} = 4 \;\; \binom{4}{2} = 6 \;\; \binom{4}{3} = 4 \;\; \binom{4}{4} = 1$
$\vdots$		

Man erkennt unter anderem, dass die „mittigen“ Binomialkoeffizienten für ein bestimmtes n, sich als Summe der beiden Binomialkoeffizienten bilden, die jeweils darüber stehen. Zur besseren Illustration betrachten wir nochmal das Pascalsche Dreieck bis $n = 3$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Dieser Zusammenhang kann allgemein formuliert werden durch

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Satz 2.3.8 (Binomischer Lehrsatz): Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Beispiel 2.3.9: Der Fall $n = 2$ entspricht genau der aus der Schule bekannten „ersten" binomischen Formel. Es ist

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}a^{2-1}b + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Beispiel 2.3.10: Wir betrachten den Ausdruck

$$\left(4x + \frac{1}{x}\right)^8$$

und wollen den Koeffizienten vom konstanten Glied berechnen. Nach dem binomischen Lehrsatz und den Potenzgesetzen gilt zunächst

$$\begin{aligned}\left(4x + \frac{1}{x}\right)^8 &= \left(4x + x^{-1}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(4x)^{8-k}(x^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}4^{8-k}x^{8-k}x^{-k} = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}4^{8-k}x^{8-k-k} \\ &= \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}4^{8-k}x^{8-2k}\end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht, dass das konstante Glied genau für x^0 entsteht. Somit hat man die Gleichung $8 - 2k = 0$ zu lösen. Triviale Umformungen ergeben $k = 4$. Folglich ergibt sich für den Koeffizienen

$$\binom{8}{k}4^{8-k} = \binom{8}{4}4^{8-4} = 70 \cdot 256 = 17920$$

Kapitel 3

Funktionen

3.1 Relationen

In Kapitel 3.5 haben wir das kartesische Produkt definiert. Das führt zu folgender Definition.

Definition 3.1.1: Unter einer Relation $\mathcal{R}$ zwischen zwei Mengen A und B versteht man eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}$, also $\mathcal{R} \subseteq A \times B$.

Beispiel 3.1.2: Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{w, x, y, z\}$. Dann ist eine Realation gegeben durch

$$\mathcal{R} = \{(a, x)\,;(b, z)\,;(c, w)\,;(c, y)\}\,.$$

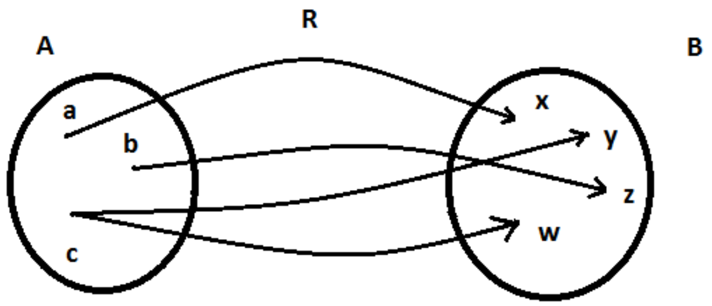

Abbildung 3.1: Beispiel einer Relation

Beispiel 3.1.3: Wir betrachten die Relation $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y + 4x \leq 6\}$. Diese Menge stellt also alle Punkte (x,y) dar, welche die Ungleichung

$$2y + x \leq 6 \iff y \leq -\frac{1}{2}x + 3$$

erfüllen.

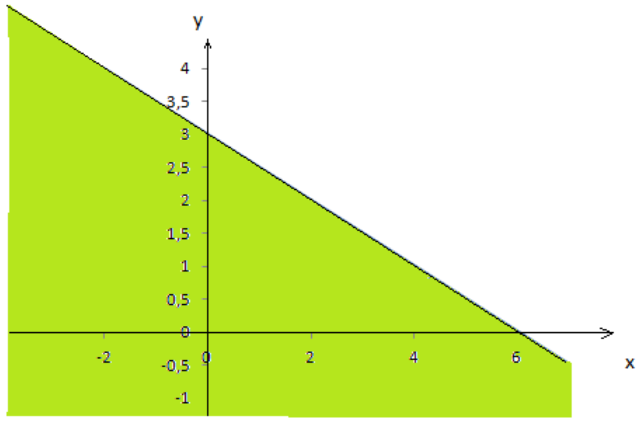

Abbildung 3.2: Beispiel einer weiteren Relation

Bemerkung 3.1.4: Da durch Relationen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ beschrieben werden, gelten natürlich auch die gleichen Mengenoperationen, die wir in Kapitel 3 kennen gelernt haben.

3.2 Allgemeiner Funktionsbegriff und erste Eigenschaften

Definition 3.2.1: Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) $f : A \longrightarrow B$ (A und B sind zwei nichtleere reelle Teilmengen) ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zuordnet. Die Menge $A = D_f$ heißt *Definitionsbereich* der Funktion. Ist $y = f(x)$, dann heisst y das *Bild* zu x und x ist ein *Urbild* zu y. Die Menge $B = W_f$ ist die *Zielmenge* oder der *Wertebereich* von f. Außerdem versteht man unter der Menge $\text{Bild}(f) = \{f(x) : x \in A\}$ (also die Menge aller Bilder) das *Bild* der Funktion.

Bemerkung 3.2.2: Funktionen sind also spezielle Relationen, nämlich genau die, bei denen jedem Element aus A *genau ein* Element aus B zugeordnet wird.

Beispiel 3.2.3: Seien $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{w, x, y, z\}$. Dann ist eine Relation gegeben durch

$$\mathcal{R} = \{(a, x)\,; (b, z)\,; (c, w)\}\,.$$

Da diese eindeutig ist, handelt es sich um eine Funktion f, das heißt $\mathcal{R} = f$.

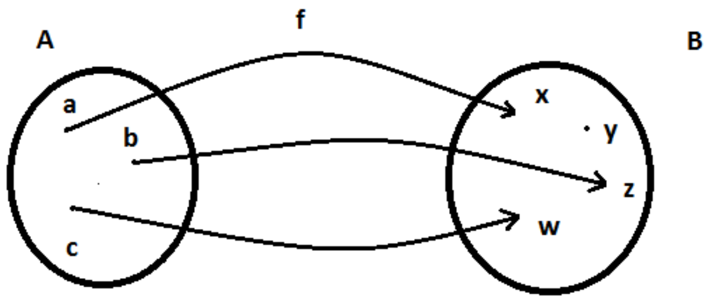

Abbildung 3.3: Beispiel einer Relation, welche auch eine Funktion ist.

Im Folgenden wollen wir uns einige grundlegende Eigenschaften anschauen, welche Funktionen besitzen können.

Definition 3.2.4: Sei $f \ : \ A \longrightarrow B$ eine Funktion. Dann heißt f *injektiv*, falls für alle $x_1, \ x_2 \in A$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, dass $x_1 = x_2$. Ferner heißt f *surjektiv*, falls W_f =Bild(f). Ist f sowohl injektiv als auch surjektiv, so nennt man die Funktion *bijektiv*.

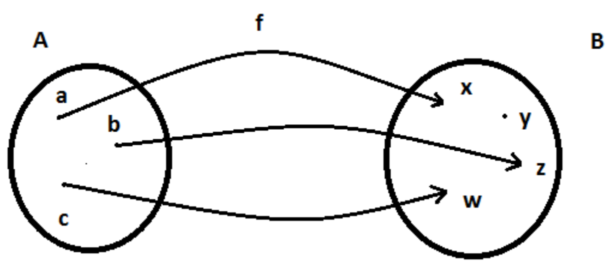

Abbildung 3.4: Beispiel einer Funktion, welche *injektiv*, aber nicht *surjektiv* ist.

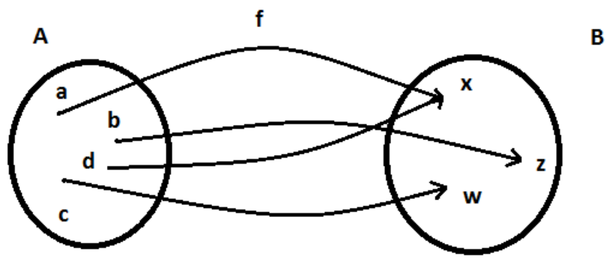

Abbildung 3.5: Beispiel einer Funktion, welche *surjektiv*, aber nicht *injektiv* ist.

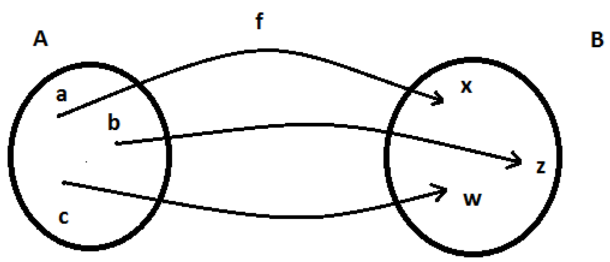

Abbildung 3.6: Beispiel einer *bijektiven* Funktion.

Beispiel 3.2.5: Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist zum Beispiel weder injektiv noch surjektiv und somit natürlich auch nicht bijektiv. Genauer ist zum einen $\text{Bild}(f) = \mathbb{R}_0^+ \neq \mathbb{R}$, wodurch die Bedingung für Surjektivität verletzt ist und weiterhin ist beispielsweise mit $f(1) = 1^2 = 1$ und $f(-1) = (-1)^2 = 1$, also $f(1) = f(-1)$, aber $1 \neq -1$, die Injektivitätsbedingung verletzt.

Beispiel 3.2.6: Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ ist ein Beispiel für eine bijektive Funktion. Genauer ist zum einen $\text{Bild}(f) = \mathbb{R} = W_f$, wodurch die Bedingung für Surjektivität erfüllt ist und weiterhin wird jeder Funktionswert auch wirklich nur einmal angenommen, somit ist f auch injektiv.

Definition 3.2.7: Eine Funktion $f : D_f \longrightarrow W_f$ heißt *gerade* (symmetrisch zur y-Achse), falls
$$f(x) = f(-x) \ \ \forall\, x \in D_f.$$
Außerdem versteht man unter einer *ungeraden* (zum Ursprung symmetrischen) Funktion $f : D_f \longrightarrow W_f$ eine Funktion mit der Eigenschaft
$$f(x) = -f(-x) \ \ \forall\, x \in D_f.$$

Beispiel 3.2.8: Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist ein Beispiel für eine gerade Funktion, denn

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Ein Beispiel für eine ungerade Funktion ist die Ursprungsgerade $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$, da

$$-f(-x) = -(-x) = x = f(x).$$

Weder gerade noch ungerade ist die Funktion $f(x) = x^2 + x$, da

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x) \quad \text{sowie} \\ -f(-x) &= -(x^2 - x) = -x^2 + x \neq f(x) \end{aligned}$$

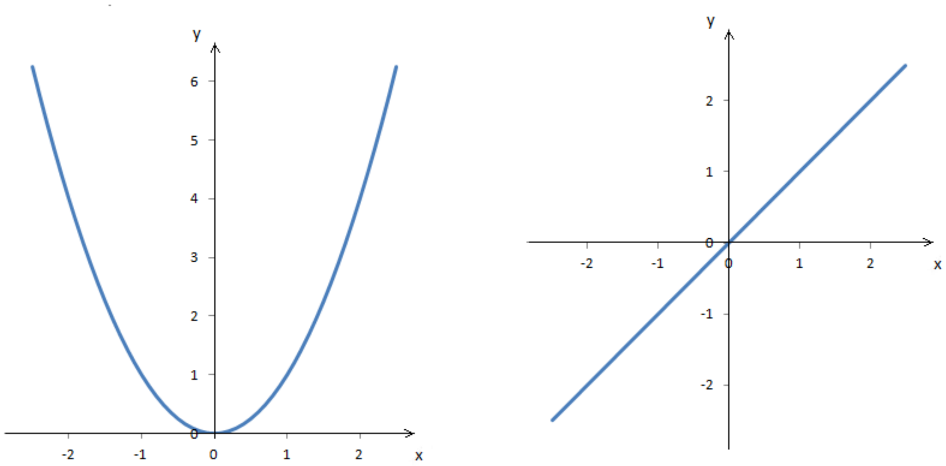

Abbildung 3.7: Beispiel einer geraden (links) und ungeraden Funktion (rechts).

Definition 3.2.9: Eine Funktion $f : D_f \longrightarrow W_f$ heißt *(streng) monoton wachsend*, falls

$$f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2) \;\; \forall\, x_1, x_2 \in D_f \;\; \text{mit} \;\; x_1 \overset{(<)}{\leq} x_2.$$

Außerdem heißt f *(streng) monoton fallend*, falls

$$f(x_1) \overset{(>)}{\geq} f(x_2) \;\; \forall\, x_1, x_2 \in D_f \;\; \text{mit} \;\; x_1 \overset{(<)}{\leq} x_2.$$

Beispiel 3.2.10: Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ ist ein Beispiel für eine streng monoton wachsende Funktion, während $f(x) = -x$ streng monoton fallend ist.

Definition 3.2.11: Eine Funktion $f : D_f \longrightarrow W_f$ heißt beschränkt, falls ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \leq c$$

für alle $x \in D_f$ existiert.

3.3 Lineare Funktionen

Definition 3.3.1: Unter einer linearen Funktion versteht man eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Gestalt

$$f(x) = mx + n,$$

wobei $m \in \mathbb{R}$ der Anstieg und $n \in \mathbb{R}$ die Schnittstelle mit der y-Achse ist.

Bemerkung 3.3.2: Eine lineare Funktion ist durch zwei Punkte eindeutig bestimmt. Für die Punkte $P(x_1; y_1)$ und $Q(x_2; y_2)$ berechnet man zunächst den Anstieg durch

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

und setzt diesen sowie eine der beiden Punkte in die Funktionsgleichung $y = mx + n$ ein, um daraus den Parameter n zu bestimmen.

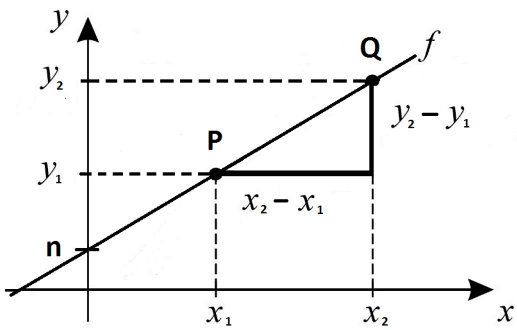

Abbildung 3.8: Graphische Interpretation einer allgemeinen linearen Funktion

Beispiel 3.3.3: Wir bestimmen die lineare Funktion, welche durch die Punkte $P(1; 3)$ und $Q(-2; -3)$ geht. Es ist

$$m = \frac{-3-3}{-2-1} = \frac{-6}{-3} = 2$$

sowie

$$3 = 2 \cdot 1 + n \Longleftrightarrow n = 1.$$

Somit ergibt sich $f(x) = 2x + 1$.

3.4 Quadratische Funktionen

Definition 3.4.1: Unter einer quadratischen Funktion versteht man eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Gestalt

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ die reellen Koeffizienten sind ($a \neq 0$).

Beispiel 3.4.2: Für $a = 1$ und $b, c = 0$ erhält man die sogenannte Normalparabel $f(x) = x^2$.

Bemerkung 3.4.3: Der Parameter a sorgt für eine Stauchung oder Streckung der Funktion bzw. auch dafür, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet ist. Sei $a \neq 0$ (sonst haben wir nämlich eine lineare Funktion), dann kann sich folgendes einprägen

a) Falls $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.

b) Ist $|a| > 1$, so handelt es sich um eine gestreckte Parabel, falls $|a| < 1$, so spricht man von einer gestauchten Parabel.

Bemerkung 3.4.4: Die Parameter b und c bewirken eine Verschiebung in x- bzw. in y-Richtung. Am besten ist es, mit Hilfe der sogenannten quadratischen Ergänzung, folgende Form herzustellen

$$f(x) = a(x + d)^2 + e.$$

Dies ist die Scheitelpunktform und der Scheitelpunkt liegt bei $S(-d; e)$.

Beispiel 3.4.5: Wir betrachten die quadratische Funktion $f(x) = 4x^2 - 16x + 8$ und berechnen die Scheitelpunktform von f. Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - 16x + 8 = 4(x^2 - 4x + 2) \\ &= 4(\underbrace{x^2 - 4x \color{red}{+4}}_{=(x-2)^2} \color{red}{-4} + 2) \\ &= 4((x-2)^2 - 2) \\ &= 4(x-2)^2 - 8 \end{aligned}$$

Somit haben wir eine gestreckte, nach oben geöffnete quadratische Funktion, deren Scheitelpunkt bei $S(2; -8)$ liegt.

Bemerkung 3.4.6: Hat die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ die Nullstellen x_{N_1} und x_{N_2}, dann gilt

$$x_{N_1} + x_{N_2} = -p \quad \text{sowie} \quad x_{N_1} \cdot x_{N_2} = q.$$

So kann man also immer die Probe machen, ob man richtig gerechnet hat. Dies wird auch als Wurzelsatz von Vieta bezeichnet.

Beispiel 3.4.7: Wir betrachten die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 8$ und berechnen die Nullstellen von f. Es ist

$$\begin{aligned} f(x) \overset{!}{=} 0 &\Longrightarrow 0 \overset{!}{=} x^2 + 2x - 8 \\ &\Longrightarrow x_{N_{1/2}} = -1 \pm \sqrt{1 - (-8)} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3 \\ &\Longrightarrow x_{N_1} = -1 + 3 = 2 \ \wedge \ x_{N_2} = -1 - 3 = -4. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$x_{N_1} + x_{N_2} = 2 - 4 = -2 \quad \text{sowie} \quad x_{N_1} \cdot x_{N_2} = 2 \cdot (-4) = -8.$$

3.5 Polynome

Definition 3.5.1: Unter einem (reellen) Polynom n-ten Grades versteht man eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die reellen Koeffizienten sind ($a_n \neq 0$).

Beispiel 3.5.2: Die konstanten Funktionen $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ sind Polynome 0. Grades.

Beispiel 3.5.3: Die linearen Funktionen $f(x) = mx + n$ mit $m, n \in \mathbb{R},\ m \neq 0$ sind Polynome 1. Grades.

Beispiel 3.5.4: Die quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ sind Polynome 2. Grades.

Bemerkung 3.5.5: Sei f ein Polynom vom Grad n und x_N eine Nullstelle von f, das heißt $f(x_N) = 0$, dann lässt sich f wie folgt darstellen

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x),$$

wobei g ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist. Für die Umformung kann man zum Beispiel *Polynomdivision* benutzen.

Beispiel 3.5.6: Wir betrachten das Polynom $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$. Durch Probieren finden wir $x_N = -1$, da $f(-1) = 0$.

$$\begin{array}{rl} \Big(\quad x^3 + x^2 - 2x - 2\Big) : \Big(x + 1\Big) = x^2 - 2 \\ \underline{- x^3 - x^2} \qquad\qquad\qquad & \\ - 2x - 2 & \\ \underline{2x + 2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x+1) \cdot \underbrace{(x^2 - 2)}_{=g(x)}$$

Bemerkung 3.5.7: Sei f ein Polynom vom Grad n mit der Darstellung

$$f(x) = (x - x_N)^k \cdot g(x),$$

sowie g ein Polynom vom Grad $n - k$ mit $g(x_N) \neq 0$, dann keißt x_N k-fache Nullstelle von f.

Beispiel 3.5.8: Wir betrachten das Polynom $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ und berechnen deren Nullstellen. Es ist

$$\begin{aligned} f(x) \overset{!}{=} 0 &\Longrightarrow 0 \overset{!}{=} x^3 - 4x^2 + 4x \\ &\Longrightarrow 0 = x \cdot (x^2 - 4x + 4) \\ &\Longrightarrow x_{N_1} = 0 \ \wedge \ 0 = x^2 - 4x + 4 \\ &\Longrightarrow x_{N_{2/3}} = 2 \pm \sqrt{4-4} \ \Longrightarrow \ x_{N_{2/3}} = 2 \\ &\Longrightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x-2)^2 \end{aligned}$$

Somit hat f eine doppelte Nullstelle bei 2 und eine einfache Nullstelle bei 0.

Bemerkung 3.5.9: Noch ein paar kleinere Bemerkungen zu den Nullstellen. Im Folgenden sei f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$.

a) f hat höchstens n verschiedende reelle Nullstellen $x_{N_1}, \ldots x_{N_n}$. In diesem Fall zerfällt das Polynom vollständig in n Linearfaktoren. (*Fundamentalsatz der Algebra*)

b) Bei einer $2-; 4-; \ldots; (2k)-$ fachen Nullstelle ($k \in \mathbb{N}$) wird die x-Achse nur berührt.

c) Bei einer $1-; 3-; \ldots; (2k+1)-$ fachen Nullstelle ($k \in \mathbb{N}$) wird die x-Achse geschnitten und es erfolgt ein Vorzeichenwechsel.

Beispiel 3.5.10: Wir betrachten erneut das Polynom

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x-2)^2 \ .$$

f hat wie gesehen eine doppelte Nullstelle bei 2 und eine einfache Nullstelle bei 0. Hier die dazugehörige graphische Veranschaulichung.

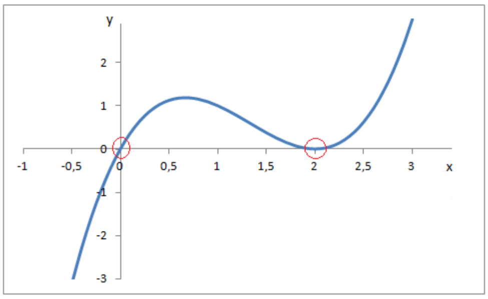

Abbildung 3.9: Polynom mit einfacher und doppelter Nullstelle

Bemerkung 3.5.11: Wir wollen nun untersuchen, wie sich Polynome für „große" Werte von x verhalten. Man spricht hierbei auch vom Verhalten im Unendlichen. Dazu betrachten wir die folgende Umformung.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \\ &= a_nx^n \cdot \left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1x}{a_nx^n} + \frac{a_2x^2}{a_nx^n} + \ldots + \frac{a_nx^n}{a_nx^n} \right) \\ &= a_nx^n \cdot \left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \ldots + 1 \right) \end{aligned}$$

Das Verhalten von f für $|x| \longrightarrow \infty$ wird also durch den Term a_nx^n bestimmt, da alle Terme in der Klammer mit Ausnahme von 1 „verschwinden".

Beispiel 3.5.12: Wir betrachten wieder das Polynom

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x-2)^2 \ .$$

An der graphischen Veranschaulichung konnte man sehen, dass die Funktion für große positive Werte von x gegen $+\infty$ und für $x \longrightarrow -\infty$ gegen $-\infty$ strebt. Dies ist genau das Verhalten, welches auch die Funktion $g(x) = x^3$ besitzt.

Bemerkung 3.5.13: Ab sofort schreiben wir bei Untersuchungen dieser Art

$$\lim_{x \to \infty} f(x),$$

wenn wir das Verhalten der Funktion für „große" x-Werte untersuchen, sprich, wenn x gegen „unendlich" strebt. Dies wird gelesen als Limes (der Grenzwert) von $f(x)$, wenn x gegen „unendlich" geht.

3.6 Gebrochen-Rationale Funktionen

Definition 3.6.1: Unter einer Gebrochen-Rationalen Funktion versteht man eine Funktion der Gestalt $f : \mathbb{R}\backslash P \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)},$$

wobei N, Z mit $N(x) \neq 0$ Polynome sind und P die Menge aller Nullstellen von N, also $P = \{x \in \mathbb{R} \mid N(x) = 0\}$.

Beispiel 3.6.2:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 1}$$

mit $Z(x) = x^2 - 2x + 3$ und $N(x) = x^3 - 1$. Wir bestimmen den Definitionsbereich von f. Dazu betrachten wir die Menge P, also die Nullstellen des Nennerpolynoms. Es ist

$$\begin{aligned} N(x) \overset{!}{=} 0 &\Longrightarrow 0 \overset{!}{=} x^3 - 1 \\ &\Longrightarrow x^3 = 1 \\ &\Longrightarrow x_p = 1 \Longrightarrow P = \{1\} \end{aligned}$$

Somit gilt $D_f = \mathbb{R}\backslash P = \mathbb{R}\backslash \{1\}$.

Bemerkung 3.6.3: Bei einer Gebrochen-Rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

kann man durch Berechnung der Nullstellen des Nenner- und Zählerpolynms wie schon im Abschnitt zuvor, eine Zerlegung in Linearfaktoren erzielen. Dann können die folgenden Fälle auftreten.

a) Nullstellen und somit auch Linearfaktoren, die im Nenner und Zähler in der gleichen Vielfachheit auftreten, werden als Definitionslücken (oder hebbare Singularitäten) bezeichnet.

b) x_N ist Nullstelle vom Nennerpolynom, nicht aber vom Zählerpolynom, das heißt also $Z(x_N) \neq 0$ und $N(x_N) = 0$. Dann ist x_N eine sogenannte Polstelle von f.

c) x_Z ist Nullstelle vom Zählerpolynom, nicht aber vom Nennerpolynom, das heißt also $N(x_Z) \neq 0$ und $Z(x_Z) = 0$. Dann ist x_Z eine Nullstelle von f.

Beispiel 3.6.4:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

mit $Z(x) = x^2 + 2x - 3$ und $N(x) = x^2 - 1$. Wir berechnen die Nullstellen von Z und N. Es ist

$$\begin{aligned} N(x) \overset{!}{=} 0 &\Longrightarrow 0 \overset{!}{=} x^2 - 1 \\ &\Longrightarrow x^2 = 1 \\ &\Longrightarrow x_{N_1} = 1 \wedge x_{N_2} = -1 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} Z(x) \overset{!}{=} 0 &\Longrightarrow 0 \overset{!}{=} x^2 + 2x - 3 \\ &\Longrightarrow x_{Z_{1/2}} = -1 \pm \sqrt{1+3} \\ &\Longrightarrow x_{Z_1} = 1 \wedge x_{Z_2} = -3 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-1) \cdot (x+3)}{(x-1) \cdot (x+1)}$$

Der Definitionsbereich der Funktion lautet also $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ und wir haben eine Lücke bei $x_L = 1$ einen Pol bei $x_N = -1$ sowie eine Nullstelle bei $x_Z = -3$.

Bemerkung 3.6.5: Wir wollen erneut einige Grenzwertuntersuchungen vornehmen. Sei also

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)},$$

wobei Z ein Polynom vom Grad k und N ein Polynom vom Grad n ist. Dann können drei Fälle auftreten.

a) Falls $n > k$, dann gilt
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

b) Falls $n < k$, dann gilt
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

c) Falls $n = k$, dann gilt
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a}{b}.$$
Dabei ist a der Koeffizient des größten x-Terms von Z und b der Koeffizient des größten x-Terms von N.

Beispiel 3.6.6:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 1}$$

mit $k = \text{Grad}(Z) = 2$ und $n = \text{Grad}(N) = 3$, somit also $n > k$. Daraus folgt, dass

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 1} = 0.$$

Beispiel 3.6.7:
$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$
mit $k = \text{Grad}(Z) = 3$ und $n = \text{Grad}(N) = 2$, somit also $k > n$. Daraus folgt, dass
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} = +\infty$$
sowie
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Beispiel 3.6.8:
$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 3}{-3x^2 - 1}$$
mit $k = \text{Grad}(Z) = 2$ und $n = \text{Grad}(N) = 2$, somit also $n = k$. Daraus folgt, dass
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 + 2x - 3}{-3x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2})}{x^2(-3 - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 + \overbrace{\frac{2}{x}}^{\nearrow 0} - \overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\nearrow 0}}{-3 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\searrow 0}} = -\frac{2}{3}.$$

Natürlich können wir auch untersuchen, wie sich die Funktion verhält, wenn x gegen einen bestimmten Wert $x_0 \in \mathbb{R}$ strebt. Schauen wir uns dazu einige Beispiele an.

Beispiel 3.6.9: Sei erneut
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}.$$
Wir untersuchen das Verhalten von f an den Stellen $x_0 = 2$, $x_0 = 1$ und $x_0 = -1$. Dazu ist zu beachten, dass $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$. Es ist
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 - 3}{2^2 - 1} = \frac{5}{3}$$
sowie
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+3)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x+1} = \frac{1+3}{1+1} = 2.$$

Der Fall $x_0 = -1$ erweist sich als etwas kniffliger. Wir hatten ja schon festgestellt, dass es sich dabei um eine Polstelle handelt und müssen den Grenzwert von rechts und von links kommend betrachten. Man schreibt allgemein $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ für den *rechtsseitigen Grenzwert* (wir nähern uns hier also von der rechten Seite an die Stelle x_0 an) und $\lim\limits_{x \to x_0^-}$ für den *linksseitigen Grenzwert*. Es ist

$$lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x+3}{x+1} = +\infty$$

sowie

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x+3}{x+1} = -\infty.$$

Definition 3.6.10: Eine Funktion $f : D_f \longrightarrow W_f$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D_f$, falls $\lim\limits_{x \to x_0}$ existiert und mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 übereinstimmt, das heißt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ferner heißt f stetig, falls f an jeder Stelle $x_0 \in D_f$ stetig ist.

Beispiel 3.6.11: Sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} \text{ für } x \neq 1 \\ 1 \text{ für } x = 1 \end{cases}$$

Zunächst ist $f(1) = 1$. Außerdem ist

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$

Da $1 \neq 2$ ist f somit nicht stetig an der Stelle $x_0 = 1$.

Im Gegensatz dazu ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} \text{ für } x \neq 1 \\ 2 \text{ für } x = 1 \end{cases}$$

stetig an der Stelle $x_0 = 1$ und sogar stetig auf dem kompletten Definitionsbereich.

3.7 Exponentialfunktionen

Definition 3.7.1: Unter einer Exponentialfunktion versteht man eine Funktion der Gestalt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a^x,$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1$.

Beispiel 3.7.2: Wir betrachten die Funktion $f(x) = 2^x$. Es gilt $D_f = \mathbb{R}$ sowie $W_f = \mathbb{R}^+$. Außerdem geht die Funktion durch den Punkt $P(0;1)$ und es ist

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0.$$

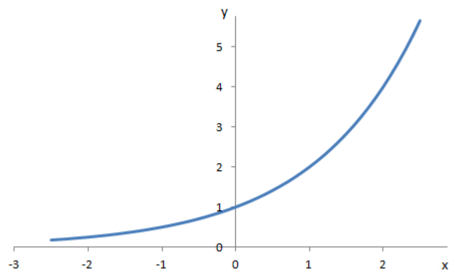

Abbildung 3.10: Darstellung der Funktion $f(x) = 2^x$

Beispiel 3.7.3: Wir betrachten die Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Es gilt $D_f = \mathbb{R}$ sowie $W_f = \mathbb{R}^+$. Auch diesmal geht die Funktion durch den Punkt $P(0;1)$ und es ist

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty.$$

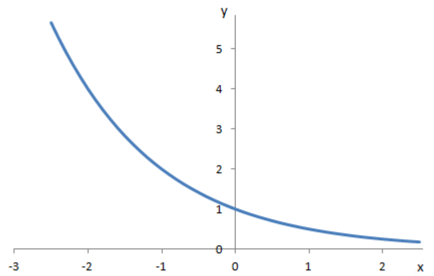

Abbildung 3.11: Darstellung der Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Bemerkung 3.7.4: Die bedeutsamste aller Exponentialfunktionen ist die sogenannte natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, welche die eulersche Zahl $e = 2,7182818284\ldots$ als Basis hat.
Für beliebige Exponentialfunktionen gilt die Umformung

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{\ln(a)\cdot x}.$$

Man kann also jede Exponentialfunktion zur Basis e darstellen.

Im Folgenden wollen wir die natürliche Exponentialfunktion genauer untersuchen. Zunächst gilt

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sowie

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Aus der Reihendarstellung der eulerschen Zahl folgt außerdem auch eine Darstellungsmöglichkeit für die natürliche Exponentialfunktion.

Es gilt

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aus dieser Darstellung lässt sich außerdem schlussfolgern, dass die natürliche Exponentialfunktion „schneller wächst" als jedes Polynom.

Folgerung 3.7.5: Sei p_n ein Polynom n-ten Grades. Dann gilt

$$\lim_{x \to +\infty} p_n(x) \cdot e^x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} p_n(x) \cdot e^x = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} p_n(x) \cdot e^{-x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} p_n(x) \cdot e^{-x} = +\infty.$$

Anwendungen für Exponentialfunktionen

Beispiel 3.7.6 (Unbeschränktes Wachstum und Zerfall): Wachstums- und Zerfallsprozesse wie zum Beispiel die ungestörtes Entwicklung einer Bakterienkultur oder radioaktiver Zerfall können mit Hilfe der Funktion

$$f(x) = a \cdot e^{kx}$$

modelliert werden, wobei $f(x)$ der Bestand zum Zeitpunkt x, a der Bestand zum Zeitpunkt $x = 0$ und $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist. Für $k > 0$ wird Wachstum beschrieben, für $k < 0$ Zerfall.

Beispiel 3.7.7 (Beschränktes Wachstum): Während die zuvor betrachtete Wachstumsfunktion ein unbegrenztes Wachstum modelliert, ist dies in der Realität natürlich selten gegeben, da Platz und Ressourcen natürlich begrenzt sind. Die sogenannte logistische Funktion beseitigt dieses Problem. Es ist

$$f(x) = \frac{K}{1 - e^{-kx} \cdot (1 - \frac{K}{a})}.$$

Dabei ist $f(x)$ der Bestand zum Zeitpunkt x, a der Bestand zum Zeitpunkt $x = 0$, $k \in \mathbb{R}^+$ und $K > 0$ die Kapazität. Anwendungen für die logistische Funktion sind zum Beispiel die Ausbreitung eines Gerüchts in einer Stadt oder die Ausbreitung einer Epedemie.

3.8 Trigonometrische Funktionen

Definition 3.8.1: Eine Funktion f heißt *periodisch* mit der Periode $p > 0$, falls

$$f(x + p) = f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

und p ist der kleinste derartige Wert.

Im Folgenden wollen wir uns einige spezielle periodische Funktionen anschauen:

Definition 3.8.2: Unter einer Sinusfunktion versteht man eine Funktion der Gestalt $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ mit

$$f(x) = \sin(x),$$

wobei $x \in \mathbb{R}$.

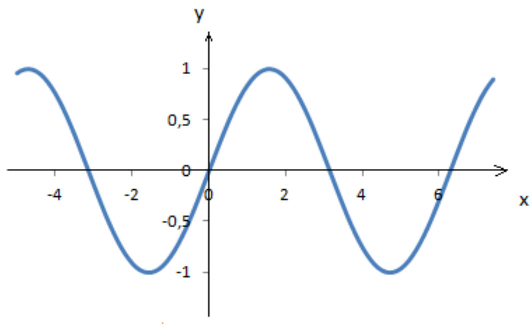

Abbildung 3.12: Graph der Sinusfunktion

Bemerkung 3.8.3 (Eigenschaften): Die Sinusfunktion ist periodisch mit Periode 2π, also

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R},\;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Außerdem gehört sie zu den ungeraden Funktionen, das heißt $\sin(-x) = -\sin(x)$. Die Nullstellen hat die Funktion bei: $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, also bei allen Vielfachen von π.

Die Reihendarstellung der Sinusfunktion ist gegeben durch

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \ldots$$

Für kleine Werte von x gilt folglich $\sin(x) \approx x$.

Definition 3.8.4: Unter einer Kosinusfunktion versteht man eine Funktion der Gestalt $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ mit

$$f(x) = \cos(x),$$

wobei $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 3.8.5 (Eigenschaften): Die Kosinufunktion ist periodisch mit Periode 2π, also

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R},\;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Außerdem gehört sie zu den geraden Funktionen, das heißt $\cos(-x) = \cos x$. Die Nullstellen hat die Funktion bei: $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$, also bei allen Vielfachen von π plus $\frac{\pi}{2}$.

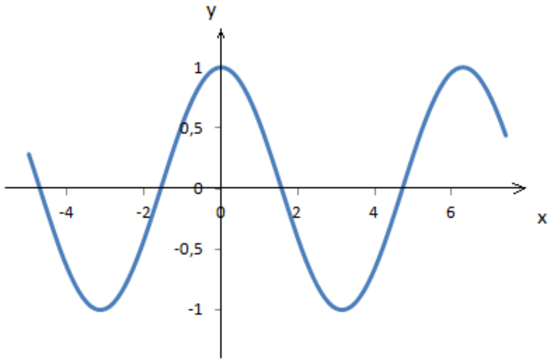

Abbildung 3.13: Graph der Kosinusfunktion

Die Reihendarstellung der Kosinusfunktion ist gegeben durch

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$$

Für kleine Werte von x gilt folglich $\cos(x) \approx 1$.

Definition 3.8.6: Unter einer Tangensfunktion versteht man eine Funktion der Gestalt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 3.8.7 (Eigenschaften): Die Tangensfunktion ist periodisch mit Periode Periode π, also

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \quad \forall\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Außerdem gehört sie zu den ungeraden Funktionen, das heißt $\tan(-x) = -\tan x$. Die Nullstellen hat die Funktion bei: $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, also bei allen Vielfachen von π. Des Weiteren hat sie Polstellen bei $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$, also bei allen Vielfachen von π plus $\frac{\pi}{2}$.

Bemerkung 3.8.8: Die allgemeine Sinus- und Kosinufunktion $f(x) = a \cdot \sin(bx)$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(bx)$ haben Periode $p = \frac{2\pi}{b}$ und den Wertebereich $[-a, a]$.

Im Folgenden wollen wir uns einige Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen anschauen.

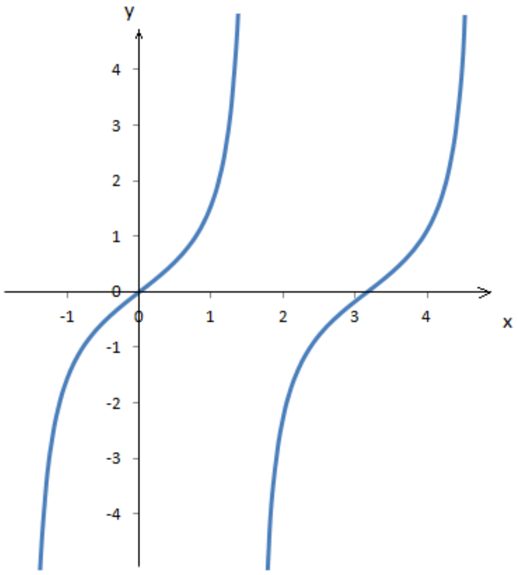

Abbildung 3.14: Graph der Tangensfunktion

a) Grundeigenschaften

$$\begin{aligned}
(\sin x)^2 + (\cos x)^2 &= 1, \\
\sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \cos x, \quad \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x, \\
\sin(x + \pi) &= -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x \\
\cot x &= \frac{1}{\tan x}, \quad \sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}, \quad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}
\end{aligned}$$

$\pm$ besagt, dass das Vorzeichen entsprechend dem Quadranten zu wählen ist.

b) Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y
\end{aligned}$$

Aus diesen folgt:

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x \cos x, \quad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \\
\tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)
\end{aligned}$$

3.9 Umkehrfunktionen

Eine Funktion f ordnet einem Element x einer Definitionsmenge D_f genau ein Element y der Wertemenge W_f zu. Sie ist somit eindeutig. Allerdings gilt die Umkehrung der Aussage nicht zwingend. Wenn auch jedem Element der Zielmenge

W_f genau ein Element der Definitionsmenge D_f zugeordnet wird, so heißt die Funktion ein-eindeutig bzw. umkehrbar (dies entspricht der Injektivitätseigenschaft).

Beispiel 3.9.1: Umkehrbare Funktionen auf ihrem kompletten Definitionsbereich sind beispielsweise die Funktionen $f(x) = x$, $f(x) = x^3$ oder $f(x) = e^x$.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht umkehrbar, würde man allerdings den Defintionsbereich wie folgt einschränken, dann ist auch die Normalparabel umkehrbar $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$.

Satz 3.9.2: Ist eine Funktion auf ihrem kompletten Definitionsbereich nur monoton wachsend oder nur monoton fallend, so besitzt sie eine Umkehrfunktion.

Bemerkung 3.9.3:

a) Ist die Funktion $f : D_f \longrightarrow W_f$ umkehrbar, so kann die Umkehrfunktion wie folgt bestimmt werden.

1. Stelle die Gleichung $y = f(x)$ nach x um.
2. Tausche die Variablenbezeichnung x und y. Man erhält f^{-1}. (Achtung!! $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$)

b) Ist $f : D_f \longrightarrow W_f$, dann ist die Umkehrfunktion eine Abbildung $f^{-1} : W_f \longrightarrow D_f$. Ferner gilt

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{sowie} \quad f^{-1}(f(x)) = x,$$

das heißt der Graph von f^{-1} entsteht durch Spiegelung an der Ursprungsgeraden $y = x$.

Beispiel 3.9.4: Wir betrachten die lineare Funktion $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$, welche die Umrechnung von x Grad Celsius in Fahrenheit modelliert. So enstprechen $10°C$ einer Temperatur von 50 Fahrenheit, da

$$f(10) = \frac{9}{5} \cdot 10 + 32 = 18 + 32 = 50.$$

Wollen wir nun eine Formel haben, welche die Temperatur von Fahrenheit in Grad Celsius umrechnet, so müssen wir die Umkehrfunktion von f bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned} y = f(x) = \frac{9}{5}x + 32 &\Longleftrightarrow y - 32 = \frac{9}{5}x \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9} \\ &\Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} \end{aligned}$$

Betrachten wir noch einige spezielle Umkehrfunktionen.

Definition 3.9.5: Unter einer Logarithmusfunktion versteht man eine Funktion der Gestalt $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \log_a(x)$$

wobei $x \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1$. Dies ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $f(x) = a^x$.

Beispiel 3.9.6: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = e^x$. Wir bestimmen die Umkehrfunktion. Es ist

$$y = e^x \Longrightarrow \ln(y) = \ln(e^x) \Longrightarrow x = \ln y.$$

Somit ist $f^{-1}(x) = \ln(x)$ die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion. Graphisch sieht das ganze wie folgt aus.

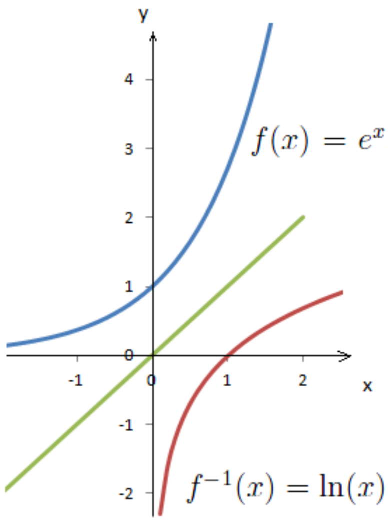

Abbildung 3.15: Graph der natürlichen e- und ln-Funktion

Definition 3.9.7: Unter einer Wurzelfunktion versteht man eine Funktion der Gestalt $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

wobei $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$. Dies ist die Umkehrfuntion zur Potenzfunktion $f(x) = x^n$.

3.10 Verknüpfung und Verschiebungen von Funktionen

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir elementare Funktionen kennengelernt sowie einige Umkehrfunktionen. Durch die wohlbekannten Rechenoperationen lassen sich allerings noch eine ganze Reihe von „neuen“ Funktionen finden. So bildet die Summe zweier Funktionen wieder eine neue Funktion.
Seien f und g zwei Funktionen, dann ist durch folgende Rechenoperationen bzw. Verknüpfungen eine neue Funktion h definiert.

1. Summe und Differenz von f und g, also $h(x) = f(x) \pm g(x)$
2. Produkt von f und g, also $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
3. Quotient von f und g, also $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
4. Verkettung von f und g, also $h(x) = (f \circ g)\ (x) = f(g(x))$

Beispiel 3.10.1: Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$. Dann ist

$h(x) = f(x) \pm g(x)$	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$	$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
$h(x) = x^2 + e^x$	$h(x) = x^2 \cdot e^x$	$h(x) = \frac{x^2}{e^x}$

$h(x) = (f \circ g)\ (x) = f(g(x))$	$h(x) = (g \circ f)\ (x) = g(f(x))$
$h(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$	$h(x) = e^{x^2}$

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann entsteht durch die Verknüpfung einer beliebigen Funktion f mit Parameter a eine Verschiebung der ursprünglichen Funktion. Genauer ergibt

a) $f(x) + a$ eine Verschiebung entlang der y-Achse
b) $f(x + a)$ eine Verschiebung entlang der x-Achse

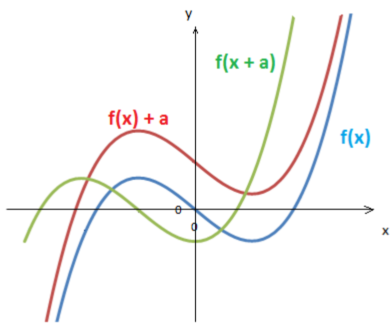

Abbildung 3.16: Verschiebung einer Funktion entlang der x- und y-Achse

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Der Differentialquotient

Definition 4.1.1: Sei $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f differenzierbar an der Stelle $x_0 \in (a; b)$, falls der folgende Grenzwert (der sogenannte Differntial-quotient) existiert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0).$$

Man spricht auch von der ersten Ableitung an der Stelle x_0. Eine Funktion f heißt differenzierbar, falls f an jeder Stelle $x_0 \in (a; b)$ differenzierbar ist.

Bemerkung 4.1.2: Äquivalent zur obigen Definition können wir auch $h = x - x_0 \Longleftrightarrow x = x_0 + h$ setzen und erhalten

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Geometrische Interpretation: Die erste Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 entspricht genau dem Tangentenanstieg an dieser Stelle, was man auch an der nachfolgenden graphischen Veranschaulichung erkennen kann.

Im Folgenden wollen wir uns einigen Beispielen zur Berechnung des Differential-quotienten zuwenden.

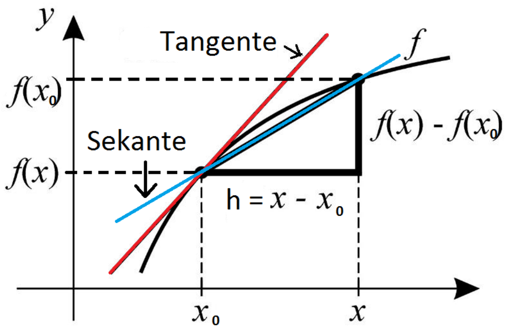

Abbildung 4.1: Geometrische Interpretation des Differentialquotienten

Beispiel 4.1.3: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ an einer beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ und wollen nun $f'(x_0)$ bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) \\
&= 2x_0
\end{aligned}$$

Beispiel 4.1.4: Wir wollen das vorherige Beispiel verallgemeinern und betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ an einer beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ und wollen erneut $f'(x_0)$ bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - x_0^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0} x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \ldots + \binom{n}{n-1} x_0 h^{n-1} + \binom{n}{n} h^n - x_0^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n-1} x_0 h^{n-2} + \binom{n}{n} h^{n-1})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n-1} x_0 h^{n-2} + \binom{n}{n} h^{n-1} \right) \\
&= n x_0^{n-1}
\end{aligned}$$

Beispiel 4.1.5: Nun wollen wir uns noch eine Funktion anschauen, welche nicht an jeder Stelle differenzierbar ist und betrachten dazu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$. Wir erinnern uns zunächst an die Definition, wonach

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

Somit ist der linksseitige Grenzwert ungleich dem rechtsseitigen Grenzwert, da $1 \neq -1$. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ also nicht differenzierbar.

Bemerkung 4.1.6: Das letzte Beispiel hat außerdem gezeigt, dass stetige Funktionen nicht unbedingt differenzierbar sein müssen. Die Umkehrung dieser Aussage stimmt allerdings. *Jede differenzierbare Funktion ist stetig.*

Bemerkung 4.1.7: Folgende Schreibweise für die erste Ableitung ist auch noch gebräuchlich:
$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$.

Bemerkung 4.1.8: Die erste Ableitung beschreibt die lokale Änderungsrate der Funktion. Nimmt man zum Beispiel den zurückgelegten Weg s als Funktion von der Zeit t, so ist Änderung des Weges mit der Zeit genau die (Momentan-) Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t, oder anders ausgedrückt ist

$$s'(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = v(t).$$

4.2 Ableitung elementarer Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir uns die Ableitung der Grundfunktionen anschauen, welche natürlich allesamt auf die Berechnung der jeweiligen Differentialquotienten zurückzuführen sind.

1. $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ (Potenzregel)

   Dazu wollen wir uns auch ein paar kleinere Beispiele anschauen:

   a) $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}. \Longrightarrow f'(x) = 0$

   b) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

   c) $f(x) = x^5 \Longrightarrow f'(x) = 5x^4$

   d) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2} \Longrightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

2. $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$

3. $f(x) = \ln(x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

4. $f(x) = \sin(x) \Longrightarrow f'(x) = \cos(x)$

5. $f(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(x) = -\sin(x)$

4.3 Ableitungsregeln

Im vorangegangen Kapitel haben wir gesehen, dass man durch gewisse Verknüpfungen von elementaren Funktionen neue Funktionen erhält. Auch für diese gibt es gewisse Regeln, wie sich die Ableitung relativ einfach berechnen lässt. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass es sich bei $fg, u,$ und v um differenzierbare Funktionen handelt. Dann gilt

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ (Summenregel)

2. $(cf(x))' = cf'(x)$ (Faktorregel)

3. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ (Produktregel)

4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \quad$ falls $v(x) \neq 0$ (Quotientenregel)

5. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (Kettenregel)

Da die Kettenregel mit Sicherheit die größten Schwierigkeiten bereitet, wollen wir uns dazu noch ein paar Spezialfälle anschauen:

a) Ableitung von verketteten Exponentialfunktionen

$$f(x) = e^{w(x)} \Longrightarrow f'(x) = w'(x) \cdot e^{w(x)}$$

Bsp.: $f(x) = e^{-x^2} \Longrightarrow f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$, wobei $w = -x^2$ und $w' = -2x$

b) Ableitung von verketteten Logarithmusfunktionen

$$f(x) = \ln(w(x)) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{w(x)} \cdot w'(x)$$

Bsp.: $f(x) = \ln(x^2+1) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$, wobei $w = x^2+1$ und $w' = 2x$

c) Ableitung von verketteten Potenzfunktionen

$$f(x) = w(x)^n \Longrightarrow f'(x) = n \cdot w(x)^{n-1} \cdot w'(x)$$

Bsp.: $f(x) = \sqrt{x^2+x} = (x^2+x)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+1) = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}}$, wobei $w = x^2+x$ und $w' = 2x+1$

d) Ableitung von Funktionen der Gestalt $f(x) = u(x)^{v(x)}$
Hier müsen wir mit einem „Trick“ arbeiten, indem wir die Funktion in eine Exponentialfunktion umschreiben. Wir erinnern uns außerdem an das Logarithmusgesetz $\ln a^b = b \cdot \ln a$. Somit ergibt sich

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{\ln\left(u(x)^{v(x)}\right)} = e^{v(x)\cdot\ln(u(x))}$$

Die umgeschriebene Funktion können wir nun mit Hilfe von Spezialfall a) ableiten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f'(x) &= [v(x) \cdot \ln(u(x))]' \cdot e^{v(x)\cdot\ln(u(x))} \\ &= \left[v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\right] \cdot u(x)^{v(x)} \end{aligned}$$

Bsp.: $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\cdot\ln x} \Longrightarrow f'(x) = \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \cdot 1\right] \cdot e^{x\cdot\ln x} = [\ln x + 1] \cdot x^x$, wobei $u = v = x$ und $u' = v' = 1$

4.4 Extremwerte

Satz 4.4.1: Sei f auf $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbar, wobei $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ mit $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt:
a) $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Minimum.
b) $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Maximum.

Beispiel 4.4.2: Sei $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$.
Wir benötigen zunächst die ersten beiden Ableitungen von f. Dazu benutzen wir die Potenzregel.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 \\ f''(x) &= \frac{1}{2}x - 2. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Nullstellen der ersten Ableitung (notwendige Bedingung). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &f'(x) \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow 0 \overset{!}{=} \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 \Longrightarrow 0 = x^2 - 8x + 12 \\ &\qquad \Longrightarrow x_{E_{1/2}} = 4 \pm \sqrt{16-12} \;\Longrightarrow\; x_{E_1} = 4 + 2 = 6 \;\wedge\; x_{E_2} = 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Um zu überprüfen, ob ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt, setzen wir die (möglichen) Extremstellen in die zweite Ableitung ein (hinreichende Bedingung). Wir erhalten

$$f''(x_{E_1}) = f''(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 - 2 = 1 > 0$$

Es handelt sich also um ein lokales Minimum bei $T(6; f(6))$. Ferner ist $f(6) = \dfrac{1}{12} \cdot 6^3 - 6^2 + 3 \cdot 6 = 0 \Longrightarrow T\,(6; 0)$.

Weiterhin ergibt sich

$$f''(x_{E_2}) = f''(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 = -1 < 0$$

Es handelt sich also um ein lokales Maximum bei $H(2; f(2))$. Ferner ist $f(2) = \dfrac{1}{12} \cdot 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 = \dfrac{8}{3} \Longrightarrow H\left(2; \dfrac{8}{3}\right)$.

Beispiel 4.4.3: Sei $f(x) = e^{-x^2}$.
Wir benötigen zunächst wieder die ersten beiden Ableitungen von f. Dazu benutzen wir diesmal die Ketten- und Produktregel.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \cdot e^{-x^2} \\ f''(x) &= (-2) \cdot e^{-x^2} + (-2x) \cdot (-2x \cdot e^{-x^2}) \\ &= e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2). \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Nullstellen der ersten Ableitung (notwendige Bedingung). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) &\overset{!}{=} 0 \Longrightarrow 0 \overset{!}{=} -2x \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{\neq 0} \Longrightarrow 0 = -2x \\ &\Longrightarrow x_E = 0. \end{aligned}$$

Um zu überprüfen, ob ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt, setzen wir die (mögliche) Extremstelle in die zweite Ableitung ein (hinreichende Bedingung). Wir erhalten

$$f''(x_E) = f''(0) = e^{-0^2} \cdot (4 \cdot 0^2 - 2) = -2 \cdot \underbrace{e^0}_{=1} = -2 < 0$$

Es handelt sich also um ein lokales Maximum bei $H(0; f(0))$. Ferner ist

$$f(0) = e^{-0^2} = 1 \Longrightarrow H\,(0; 1)\,.$$

4.5 Wendepunkte

Satz 4.5.1: Sei f auf $[a, b]$ dreimal stetig differenzierbar, wobei $f''(x_0) = 0$ mit $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:
Ist $f'''(x_0) \neq 0 \Longrightarrow\ f$ hat in x_0 einen Wendepunkt.

Bemerkung 4.5.2: Ist $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ sowie $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f einen sogenannten Sattelpunkt bei $SP(x_0 \mid f(x_0))$.

Beispiel 4.5.3: Sei $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$.
Wir benötigen zunächst die zweite und dritte Ableitung von f. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 \\ f''(x) &= \frac{1}{2}x - 2 \\ f'''(x) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Nullstellen der zweiten Ableitung (notwendige Bedingung). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) \stackrel{!}{=} 0 &\Longrightarrow 0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}x - 2 \\ &\Longrightarrow\ x_W = 4. \end{aligned}$$

Um zu überprüfen, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, setzen wir die (möglichen) Wendestellen in die dritte Ableitung ein (hinreichende Bedingung). Wir erhalten

$$f'''(x_W) = f'''(4) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Es handelt sich also um einen Wendepunkt bei $W(4; f(4))$. Ferner ist $f(4) = \dfrac{1}{12} \cdot 4^3 - 4^2 + 3 \cdot 4 = \dfrac{4}{3} \Longrightarrow T\left(4; \dfrac{4}{3}\right)$.

Beispiel 4.5.4: Sei $f(x) = x^3$.
Wir benötigen zunächst die zweite und dritte Ableitung von f. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6. \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass $f'(0) = f''(0) = 0$ sowie $f'''(0) = 6 \neq 0$.
Somit besitzt f einen Sattelpunkt bei $S(0; 0)$.

textit

Kapitel 5

Integralrechnung

5.1 Konstruktion des Integrals

Gegeben sei eine beschränkte und stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

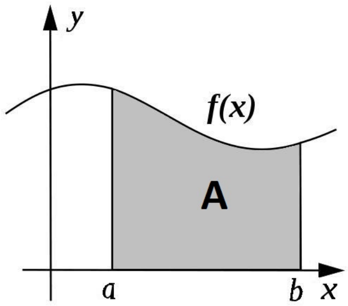

Abbildung 5.1: Stetige und beschränkte Funktion auf einem Intervall $[a, b]$

Frage: Wie berechnet man den Flächeninhalt A?

1. Schritt: Wir betrachten eine auf $[a, b]$ konstante Funktion f mit $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

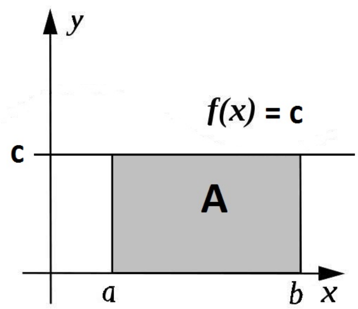

Abbildung 5.2: Flächeninhalt einer konstanten Funktion auf einem Intervall $[a, b]$

Da es sich bei der geometrischen Figur um ein Rechteck handelt, wissen wir natürlich, wie wir diesen Flächeninhalt berechnen können. Es ist $A = c \cdot (b - a)$.

2. Schritt: Approximation des Flächeninhalts durch Rechtecke

Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ durch

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

in n äquidistante (gleichgroße) Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, \ldots, n$. Nun wählen wir aus jedem Teilintervall eine (beliebige) Zwischenstelle $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ und bestimmen den dazugehörigen Funktionswert an dieser Stelle, das heißt $f(s_i)$.
Ferner bilden wir die sogenannte Riemann-Summe (*benannt nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann*)

$$R_S = \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Wir definieren dann das sogenannte Riemann-Integral durch

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =: \int_a^b f(x)\, dx$$

Man sagt auch, dass f integrierbar ist, falls dieser Grenzwert existiert (also $\lim_{n\to\infty} R_S < \infty$).

Beispiel 5.1.1: Wir betrachten die Funktion $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und wollen mit Hilfe von Riemann-Summen den Flächeninhalt berechnen der zwischen f und der x-Achse eingeschlossen wird. Dazu zerlegen wir das Intervall $[0; 1]$ in n Teilintervalle der Länge $\frac{1}{n}$ und wählen die Zwischenstelle immer am rechten Rand des Intervalls. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
R_S &= \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot \frac{1}{n} \\
&= f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2n^2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 x\, dx = \lim_{n\to\infty} R_S = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot (1 + \overbrace{\frac{1}{n}}^{\nearrow 0})}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

5.2 Eigenschaften des Integrals

Bemerkung 5.2.1: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gelten für unser zuvor konstruiertes (Riemann-) Intergral die folgenden Eigenschaften.

a) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

b) $\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ (Homogenität)

c) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ (Additivität)

d) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

e) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, falls $a < c < b$.

5.3 Stammfunktionen

Definition 5.3.1: Sei $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $F : D_F \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f, falls F differenzierbar ist und

$$F'(x) = f(x)\ \forall x \in D_f.$$

Bemerkung 5.3.2: Die Stammfunktion von f ist *nicht* eindeutig! Denn falls F eine Stammfunktion von f ist, dann ist dies auch $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Um das zu zeigen, berechnen wir die Ableitung von $F + c$. Es gilt

$$[F(x) + c]' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x)$$

Im Folgenden wollen wir einige elementare Stammfunktionen betrachten.

1. $f(x) = x^n \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$ sofern $n \in \mathbb{R}, n \neq -1$
   Man sieht , dass die Potenz um 1 erhöht und durch diese neue Potenz geteilt wird. Das Bilden einer Stammfuntion ist also im Prinzip die Umkehrung zum Ableiten. Auch kann man leicht die Probe machen. Denn die Ableitung der Stammfunktion ist per Definition ja die ursprüngliche Funktion. Nun wollen wir uns zu dieser Regel auch ein paar kleinere Beispiele anschauen:

   a) $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}. \Longrightarrow F(x) = a \cdot x$

   b) $f(x) = x \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$

c) $f(x) = x^5 \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{6} \cdot x^6$

d) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow F(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{-1} \cdot x^{-1} = -\frac{1}{x}$

2. $f(x) = e^x \Longrightarrow F(x) = e^x$
3. $f(x) = e^{ax+b} \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$
4. $f(x) = a^x = e^{ln(a^x)} = e^{ln(a)\cdot x} \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{ln(a)}e^{\ln(a)\cdot x} = \frac{1}{ln(a)}a^x$
5. $f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow F(x) = \ln|x|$
6. $f(x) = \sin(x) \Longrightarrow F(x) = -\cos(x)$
7. $f(x) = \cos(x) \Longrightarrow F(x) = \sin(x)$

5.4 Der Hauptsatz der Analysis

Satz 5.4.1: Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion. Dann ist die durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x) \quad \text{für } x \in (a, b).$$

Folgerung 5.4.2 (Formel von Newton-Leibniz): Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Diese Formel ermöglicht uns also die Berechnung von bestimmten Integralen, sofern wir eine Stammfunktion der Ausgangsfunktion bestimmen können.

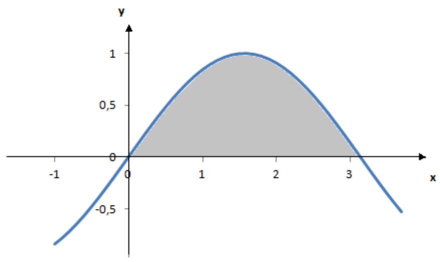

Abbildung 5.3: Flächeninhalt zwischen der Sinusfunktion und der x-Achse

Beispiel 5.4.3:

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)|_0^\pi = \underbrace{-\cos(\pi)}_{=-(-1)} - \underbrace{(-\cos(0))}_{=-1} = 2.$$

Bemerkung 5.4.4: Mit Hilfe des bestimmten Integrals können wir also den Flächeninhalt bestimmen, der zwischen f und der x-Achse eingeschlossen wird. Da die Orientierung allerdings mit beachtet werden muss, erhält man natürlich eine „negative“ Fläche, sofern f unterhalb der x-Achse liegt. Ebenso muss man berücksichtigen, ob die Ausgangsfunktion Nullstellen im Bereich der Integrationsgrenzen besitzt.

Bemerkung 5.4.5: Besitzt ein Integral keine Integrationsgrenzen, dann spricht man von einem sogenannten unbestimmten Integral. Es gilt dann

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\ , \quad c \in \mathbb{R}$$

5.5 Integrationsmethoden

Im vorangegangen Abschnitt haben wir gesehen, dass es bei stetigen Funktionen ausreicht eine Stammfunktion zu bestimmen, um Integrale zu berechnen. Allerdings treten dabei natürlich nicht nur elementare Funktionen auf. Was können wir also machen, wenn gewisse Verknüpfungen auftreten!?
Einige Methoden dazu werden wir uns im Folgenden anschauen.

5.5.1 Partielle Integration

Seien $f, g\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx.$$

Kurz: $\displaystyle\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v$

Um das Prinzip der partiellen Integration besser zu verstehen, betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 5.5.1:

$$\int_0^2 4x \cdot e^{-0{,}5\cdot x}\,dx$$

Wir berechnen das Integral mit Hilfe von partieller Integration. Es ist:
$v' = e^{-0{,}5\cdot x} \Rightarrow v = -2e^{-0{,}5\cdot x}$, sowie $u = 4x \Rightarrow u' = 4$
Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 4x \cdot e^{-0{,}5\cdot x}\,dx &= 4x \cdot \left(-2e^{-0{,}5\cdot x}\right)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 4 \cdot \left(-2e^{-0{,}5\cdot x}\right)\,dx \\
&= -8x \cdot e^{-0{,}5\cdot x}\Big|_0^2 + \int\limits_0^2 8 \cdot e^{-0{,}5\cdot x}\,dx \\
&= -8x \cdot e^{-0{,}5\cdot x}\Big|_0^2 - 16 \cdot e^{-0{,}5\cdot x}\Big|_0^2 \\
&= -8e^{-0{,}5\cdot x} \cdot (x+2)\Big|_0^2 \\
&= -8e^{-0{,}5\cdot 2} \cdot (2+2) - \left(-8e^{-0{,}5\cdot 0} \cdot (0+2)\right) \\
&= -32e^{-1} + 16 \\
&= 16 - \frac{32}{e}
\end{aligned}$$

Beispiel 5.5.2:

$$\int\limits_0^\pi x^2 \cos(x)\,dx$$

Bei diesem Integral gehen wir prinzipiell genauso vor wie im Beispiel zuvor, das heißt 3.wir müssen das Polynom ableiten. Da es sich hierbei aber um ein Polynom zweiten Grades handelt, reicht einmalige Anwendung der partiellen Integration nicht aus. Das resultierende Integral muss somit nochmals mit Hilfe partieller Integration vereinfacht werden. Wir wählen zunächst $u_1 = x^2$ und $v_1' = \cos(x)$, woraus sich $u_1' = 2x$ und $v_1 = \sin(x)$ ergibt. Das so erhaltene Integral wird nach gleichem Schema berechnet, mit $u_2 = 2x$ und $v_2' = \sin(x)$, woraus sich $u_2' = 2$ und $v_2 = -\cos(x)$ ergibt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\, dx &= x^2 \cdot \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin(x)\, dx \\
&= x^2 \cdot \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-2x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot (-\cos(x))\, dx \right] \\
&= x^2 \cdot \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)\, dx \\
&= \Big[x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) \Big] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\
&- \Big[0^2 \sin(0) + 2 \cdot 0 \cos(0) - 2\sin(0) \Big] \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2
\end{aligned}$$

Beispiel 5.5.3: Wir wollen die Stammfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion bestimmen, das heißt

$$\int \ln(x)\, dx.$$

Nun kann man sich natürlich fragen, was dieses Integral mit partieller Integration zu tun hat. Um die Antwort zu erhalten, schreiben wir den Integranden als Produkt. Es ist

$$\int \ln(x)\, dx = \int 1 \cdot \ln(x)\, dx.$$

Wir wählen
$v' = 1 \Rightarrow v = x$, sowie $u = \ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$
Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot \ln(x)\, dx &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= x \cdot \ln(x) - \int 1\, dx \\
&= x \cdot \ln(x) - x + c \\
&= x \cdot (\ln(x) - 1) + c\ , \text{ mit } \ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

5.5.2 Die Substitutionsregel

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(z)\,dz. \tag{5.5.1}$$

Dabei ist $z = \phi(x)$ sowie $dz = \phi'(x)\,dx$. Außerdem entstehen durch die Änderung der Integrationsvariablen neue Integrationsgrenzen: $a \to \phi(a)$ und $b \to \phi(b)$.

Bemerkung 5.5.4: Die Substitutionsregel kann man in zwei Richtungen anwenden. Wenn man die Gleichung (5.5.1) von links nach rechts anwendet, so spricht man von der Umkehrung der Kettenregel. Umgedreht nennt man das Verfahren die Substitution der Integrationsvariablen.

Beispiel 5.5.5: Umkehrung der Kettenregel

$$\int_0^2 x \cdot e^{x^2}\,dx.$$

Wir machen die Substitution $z = \phi(x) = x^2$. Dann ist $dz = 2x \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$ sowie $0 \to \phi(0) = 0^2 = 0$ und $2 \to \phi(2) = 2^2 = 4$
Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x \cdot e^{x^2}\,dx &= \int_0^4 x \cdot e^z \frac{dz}{2x} = \frac{1}{2}\int_0^4 e^z\,dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^z\Big|_0^4 = \frac{1}{2} \cdot e^4 - \frac{1}{2} \cdot e^0 \\ &= \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right)\end{aligned}$$

Beispiel 5.5.6: Substitution der Integrationsvariablen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Wir machen die Substitution $x = \sin(z)$. Dann ist $dx = \cos(z)\,dz$ sowie und mit $x = \sin(z) \implies \phi(x) = z = \arcsin(x)$ ergibt sich $0 \to \phi(0) = \arcsin(0) = 0$ und

$\frac{1}{2}\sqrt{2} \to \phi(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$
Somit haben wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(z))^2}}\cos(z)\,dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(z)}{\sqrt{(\cos(z))^2}}\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(z)}{\cos(z)}\,dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dz = z\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Benutzt wurde hierbei der trigonometrische Pythagoras $(\cos(z))^2 + (\sin(z))^2 = 1$.

5.5.3 Partialbruchzerlegung

Im Folgenden wollen wir uns anschauen, wie man Stammfunktionen von Gebrochen-Rationalen Funktionen bestimmen kann, sofern die Substitutionsregel nicht angewendet werden kann.
Sei $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$, wobei Z ein Polynom vom Grad k und N ein Polynom vom Grad n ist.
Wir betrachten zunächst nur den Fall, dass der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist, also $n > k$. Sofern diese Voraussetzung erfüllt ist, interessieren uns die die Nullstellen des Nennerpolynoms. Dabei können drei Fälle auftreten, welche nun genauer untersucht werden.

1. Fall: Das Nennerpolynom N hat n verschiedene relle Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dann lässt sich f folgendermaßen zerlegen.

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_1}{x-x_1} + \frac{a_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{a_n}{x-x_n},$$

wobei $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ geeignete Konstansten sind.

Somit kann $\int f(x)\,dx$ mit Hilfe der Regel

$$\int \frac{a}{x+b}\,dx = a\ln|x+b| + c$$

berechnet werden.

Beispiel 5.5.7:

$$\int \frac{5x+9}{x^2+5x-6}\,dx$$

Hierbei ist $Z(x) = 5x+9$ mit $k = \text{Grad}(Z) = 1$ und $N(x) = x^2+5x-6$ mit $n = \text{Grad}(N) = 2$, somit also $n > k$ und unsere geforderte Bedingung wurde erfüllt. Berechnen wir also die Nullstellen des Nennerpolynoms. Es ist

$$\begin{aligned} N(x) \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow 0 &\overset{!}{=} x^2+5x-6 \\ \Longrightarrow x_{1/2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}+6} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} \\ \Longrightarrow\ x_1 = 1\ &\wedge\ x_2 = -6. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende Zerlegung für f

$$\frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+6}.$$

Die weiteren Schritte bestehen darin, den Hauptnenner der beiden Brüche zu bilden und dann muss ein sogenannter Koeffizientenvergleich mit der Ausgangsfunktion durchgeführt werden, um die Konstanten a und b zu bestimmen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+6} &= \frac{a\cdot(x+6)+b\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+6)} \\ &= \frac{ax+6a+bx-b)}{(x^2-x+6x-6)} \\ &= \frac{x\cdot(a+b)+6a-b}{(x^2+5x-6)} \\ &\overset{!}{=} \frac{5x+9}{x^2+5x-6}. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &a+b=5 \\ &6a-b=9 \quad |+ \\ &\Longrightarrow 7a = 14 \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow b = 3 \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+9}{x^2+5x-6}\,dx &= \int \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+6}\,dx \\ &= 2\ln|x-1| + 3\ln|x+6| + c \end{aligned}$$

2. Fall: Das Nennerpolynom N hat eine n-fache relle Nullstelle x_N. Dann lässt sich f folgendermaßen zerlegen.

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_1}{x - x_N} + \frac{a_2}{(x - x_N)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(x - x_N)^n},$$

wobei $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ geeignete Konstansten sind.

Somit kann $\int f(x)\,dx$ mit Hilfe der Regel

$$\int \frac{a}{x+b}\,dx = a \ln|x+b| + c$$

sowie für $n \geq 2$ mittels

$$\int \frac{a}{(x+b)^n}\,dx = \frac{a}{1-n} \cdot \frac{1}{(x+b)^{n-1}} + c$$

berechnet werden.

Beispiel 5.5.8:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+1}\,dx$$

Hierbei ist $Z(x) = 2x - 1$ mit $k = \text{Grad}(Z) = 1$ und $N(x) = x^2 - 2x + 1$ mit $n = \text{Grad}(N) = 2$, somit also $n > k$ und unsere geforderte Bedingung wurde erfüllt. Berechnen wir also die Nullstellen des Nennerpolynoms. Es ist

$$\begin{aligned} N(x) \overset{!}{=} 0 &\Longrightarrow 0 \overset{!}{=} x^2 - 2x + 1 \\ &\Longrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Wir haben folglich eine doppelte Nullstelle $x_N = 1$.
Somit ergibt sich folgende Zerlegung für f

$$\frac{a}{x - x_N} + \frac{b}{(x - x_N)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}.$$

Auch diesmal muss wieder der Hauptnenner gebildet werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} &= \frac{a \cdot (x-1) + b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax - a + b}{(x^2 - 2x + 1)} \\ &\overset{!}{=} \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 1}. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ -a + b &= -1 \\ \Longrightarrow b &= 1 \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2-2x+1}\,dx &= \int \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\ &= 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c\end{aligned}$$

Bemerkung 5.5.9: Falls der Grad des Zählerpolynoms größer gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist (also $k \geq n$), so muss man zunächst eine Polynomdivision durchführen.

Bemerkung 5.5.10: Es kann auch der Fall auftreten, dass das Nennerpolynom keine reellen Nullstellen besitzt. Man spricht dann von sogenannten komplexen Nullstellen (vergleiche mit Kapitel 9). Da wir dies noch nicht besprochen haben, folgt dieser Abschnitt im Anhang.

5.6 Uneigentliche Integrale

1. **Integrale von unbeschränkten Funktionen**

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass f über jedem Intervall $(a + \varepsilon; b)$ integrierbar ist. Dann heißt der Grenzwert (sofern dieser denn existiert)

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx := \int_a^b f(x)\,dx$$

das *uneigentliche Integral* von f über dem Intervall (a, b).

Beispiel 5.6.1:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-0{,}5}\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2 \cdot \sqrt{x}\,\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2 \cdot \sqrt{1} - \underbrace{2 \cdot \sqrt{\varepsilon}}_{\searrow 0} \right] \\ &= 2\end{aligned}$$

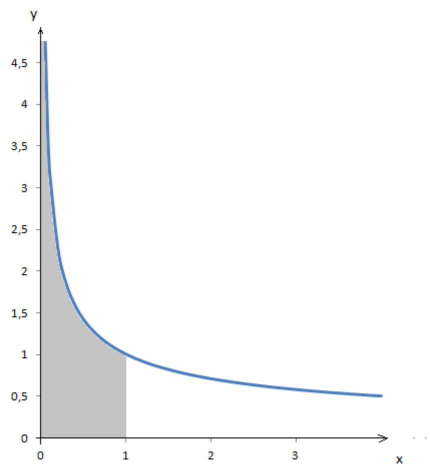

Abbildung 5.4: Fläche, welche „unendlich“ nach oben reicht am Beispiel der unbeschränkten Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2. **Integrale auf unbeschränkten Intervallen**

   Sei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass f über jedem Intervall (a, b) integrierbar ist. Existiert der Grenzwert

   $$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx := \int_a^\infty f(x)\,dx,$$

   so heißt er das *uneigentliche Integral* von f über dem Intervall (a, ∞).

   Beispiel 5.6.2:

   $$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\Big[\underbrace{-e^{-b}}_{\searrow 0} - (e^{-0})\Big] \\ &= 1\end{aligned}$$

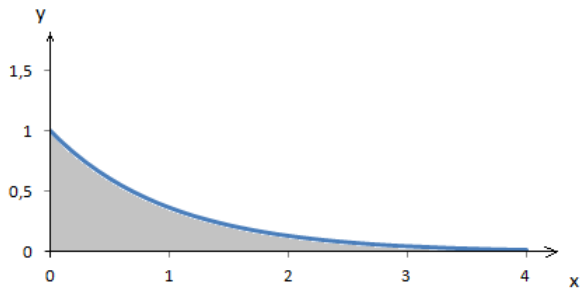

Abbildung 5.5: Fläche, welche „unendlich" nach rechts reicht am Beispiel der Funktion $f(x) = e^{-x}$.

5.7 Anwendungen der Intergralrechnung

Flächenberechnung

Die Fläche zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ über dem Intervall $[a, b]$, welche sich höchstens an den Intervallgrenzen a und b schneiden, ist gegeben durch

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 5.7.1: Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = 4x - x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 - 2x.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Schnittstellen sich genau bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ befinden. Ziel ist es jetzt den Flächeninhalt der von f und g eingeschlossenen Fläche im Intervall $[0, 3]$ zu berechnen.

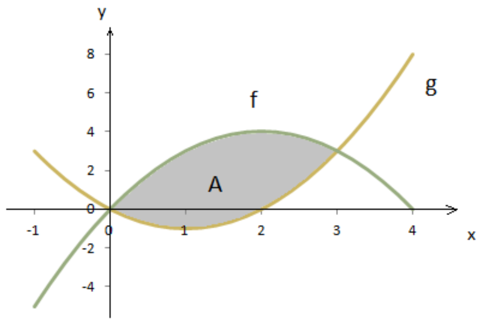

Abbildung 5.6: Eingeschlossene Fläche zwischen f und g

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 \left|4x - x^2 - (x^2 - 2x)\right| \, dx = \int_0^3 \left|6x - 2x^2\right| \, dx \\ &= (3x^2 - \frac{2}{3}x^3) \Big|_0^3 = 3 \cdot 3^2 - \frac{2}{3}3^3 - 0 \\ &= 27 - 18 = 9 \end{aligned}$$

Volumen von Rotationskörpern

Gegeben sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$.
Dann ist das Volumen V des Körpers im $\mathbb{R}^3$, der bei Rotation des Graphen der Funktion um die x-Achse entsteht, gegeben durch

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

Beispiel 5.7.2: Wir wollen die aus der Schule bekannte Volumenformel eines Kreiskegels herleiten und betrachten dazu die Funktion

$$f(x) = \frac{r}{h}x$$

im Intervall $[0, h]$.

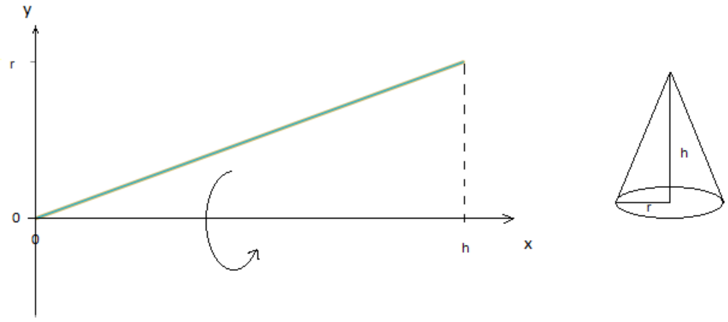

Abbildung 5.7: Kreiskegel als Rotationskörper

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \, dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} - 0 \\ &= \frac{\pi}{3} r^2 h \end{aligned}$$

Bogenlänge eines Kurvenstücks

Gegeben sei die differenziebare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist die Bogenlänge l der Kurve von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ gegeben durch

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

Beispiel 5.7.3: Wir berechnen die Bogenlänge der Kurve $f(x) = \sqrt{x^3}$ im Intervall $x \in [0, 4]$

Es ergibt sich zunächst $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Somit haben wir

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} \, dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{9} \cdot \left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9} \\ &\approx 6,8 \end{aligned}$$

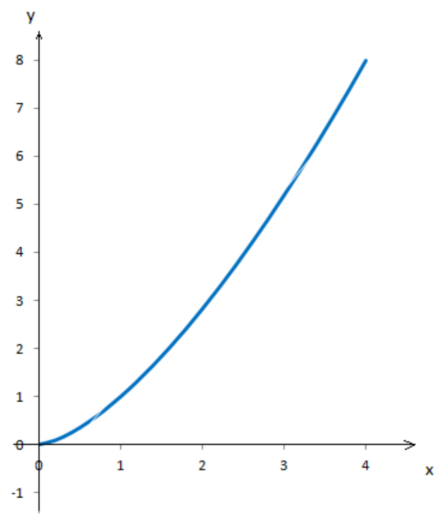

Abbildung 5.8: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = \sqrt{x^3}$

Kapitel 6

Lineare Algebra

6.1 Vektoren

Wir hatten bereits in Kapitel 3 das kartesische Produkt definiert. Daran anknüpfend wird der n-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert. Es ist

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

Die Elemente

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^n$ heißen n-dimensionale Vektoren mit Einträgen bzw. Komponenten aus $\mathbb{R}$.

Bemerkung 6.1.1: a) Der Vektor

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

wird als Nullvektor bezeichnet.

b) Die *Addition* zweier Vektoren $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ erfolgt komponentenweise. Es gilt

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

Zu beachten ist dabei, dass man einen n-dimensionalen Vektor wirklich auch nur zu einem n-dimensionalen Vektor addieren kann, das heißt ein Vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ kann nicht mit einem Vektor $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ addiert bzw. subtrahiert werden.

c) Die *Multiplikation* eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit einer reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert.

$$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix}$$

Beispiel 6.1.2: Wir betrachten die Vektoren $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Im Folgenden wollen wir den Ausdruck $\vec{z} = \vec{x} + 2\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{z}$ bestimmen.

Es ist $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bemerkung 6.1.3: Sei $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ein Vektor. Dann heißt $\vec{x}^{\,t} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ der zu $\vec{x}$ *transponierte* Vektor. Analog gilt $\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \Longrightarrow \vec{x}^{\,t} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Definition 6.1.4 (Skalarprodukt): Unter dem Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ versteht man

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^{\,t} \cdot \vec{y} = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

Bemerkung 6.1.5: Anstatt der Notation $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ benutzt man häufig auch $\vec{x} \circ \vec{y}$.

Satz 6.1.6: Zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sind zueinander *orthogonal* bzw. *stehen senkrecht aufeinander*, falls $\vec{x} \circ \vec{y} = 0$.

Beispiel 6.1.7: Wir betrachten die Vektoren $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$
Es ist $\vec{x} \circ \vec{y} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 0$. Somit sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ orthogonal zueinander.

Definition 6.1.8 (Norm): Unter der Norm eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ versteht man

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Man spricht auch vom *Betrag bzw. der Länge des Vektors.*

Satz 6.1.9: Für die Norm gelten die folgenden Eigenschaften

a) $||\lambda \cdot \vec{x}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{x}||$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

b) $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Mit Hilfe der Begriffe Norm und Skalarprodukt lässt sich nun der Winkel definieren, der zwischen 2 Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ eingeschlossen wird. Es ist

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}.$$

Beispiel 6.1.10: Wir betrachten die Vektoren $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Es ist

$$\cos(\alpha) = \frac{1+0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Somit ergibt sich $\alpha = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\alpha = 45°$.

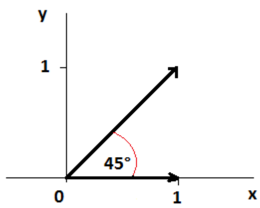

Abbildung 6.1: Winkel zwischen 2 Vektoren in der Ebene

Definition 6.1.11 (Kreuzprodukt): Unter dem Kreuzprodukt von zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ versteht man

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}.$$

Man spricht häufig auch vom *Vektorprodukt.*

Bemerkung 6.1.12: Man kann sich die Berechnung des Kreuzprodukts auch mit dem folgenden Schema einprägen.

$$
\begin{array}{ccc}
x_1 & y_1 & \\
{\color{red}x_2} & {\color{red}y_2} & \\
 & & {\color{red}x_2 y_3 - x_3 y_2} \\
{\color{red}x_3} & {\color{red}y_3} & \\
 & & {\color{red}x_3 y_1} - {\color{blue}x_1 y_3} \\
{\color{blue}x_1} & {\color{blue}y_1} & \\
 & & {\color{blue}x_1 y_2 - x_2 y_1} \\
{\color{blue}x_2} & {\color{blue}y_2} &
\end{array}
$$

Beispiel 6.1.13: Wir wollen das Kreuzprodukt der Vektoren $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ berechnen. Es ergibt sich

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 - (-2) \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Interessanterweise ergibt sich außerdem, dass

$$\langle \vec{z}, \vec{x} \rangle = -1 \cdot 8 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) = 0$$

sowie

$$\langle \vec{z}, \vec{y} \rangle = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) = 0.$$

Somit ist der durch das Kreuzprodukt entstandene Vektor $\vec{z}$ orthogonal zu den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Folgerung 6.1.14: Seien $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$. Dann gilt, dass $\vec{z}$ orthogonal zu $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist.

Das Kreuzprodukt wird also unter anderen dazu benutzt, einen Vektor zu finden, welcher im Raum senkrecht zu zwei gegebenen Vektoren ist. Dies wird zum Beispiel dazu benutzt, Normalenvektoren von Ebenen zu bestimmen. Wir wollen uns nun aber noch einige weitere geometrische Anwendungen anschauen.

Beispiel 6.1.15: Wir bestimmen den Flächeninhalt des Dreiecks Δ_{ABC}, welches aufgespannt wird von den Vektoren $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Wenn wir mit $|\Delta_{ABC}|$ hier den Flächeninhalt bezeichnen, so haben wir folgende Formel:

$$|\Delta_{ABC}| = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|,$$

d.h. der Betrag des Kreuzproduktes ist der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelograms und damit der des Dreiecks dann die Hälfte davon.

$$\begin{aligned} |\Delta_{ABC}| &= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{140} = \sqrt{35} \end{aligned}$$

6.2 Matrizen

Unter einer reellen n, m-Matrix versteht man

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

wobei n der Anzahl der Zeilen und m der Anzahl der Spalten entspricht. Man sagt dann $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, wobei

$$\mathbb{R}^{n,m} = \{\text{A ist } n, m\text{-Matrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R};\ i = 1, \dots, n \text{ und } j = 1, \dots, m\},$$

also der Raum aller reelwertigen n, m-Matrizen ist. Falls $n = m$, also die Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen, so spricht man von einer quadratischen Matrix. Spezielle quadratische n, n-Matrizen sind unter anderen

$$\begin{aligned}
\text{die Einheitsmatrix } E_n &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \\
\text{die Nullmatrix } \mathcal{O}_n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \\
\text{und die Diagonalmatrix } diag(c_1, c_2, \dots, c_n) &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Wir wollen uns nun die wichtigsten Rechenoperationen mit Matrizen anschauen.

1. Addition von Matrizen

Dabei ist zu beachten, dass diese nur definiert ist, wenn die Matrizen von der gleichen Struktur sind, d.h. die Zeilen- und Spaltenanzahl muss übereinstimmen. Zur Erinnerung, dies war so ähnlich auch schon bei der Vektorrechnung die Voraussetzung. Seien also $A, B \in \mathbb{R}^{n,m}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Bemerkung 6.2.1: Es gelten die folgenden Rechenregeln für $A, B, C \in \mathbb{R}^{n,m}$.

a) $A + B = B + A$, das heißt die Matrizenaddition ist kommutativ.

b) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$, somit gilt auch das Assoziativgesetz.

2. Multiplikation einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ mit einer reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1m} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{n1} & \lambda \cdot a_{n2} & \dots & \lambda \cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

Bemerkung 6.2.2: Mit Hilfe der ersten beiden Rechenregeln lässt sich nun auch die Subtraktion definieren. Es ist nämlich

$$(-B) = (-1) \cdot B \text{ und somit } A - B = A + (-B),$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}^{n,m}$.

3. Transponierte Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Beim Transponieren einer Matrix werden also die Zeilen und Spalten vertauscht.

Bemerkung 6.2.3: Es gelten die folgenden Rechenregeln für $A, B \in \mathbb{R}^{n,m}$.

a) $(A^t)^t = A$

b) $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $(A + B)^t = A^t + B^t$

4. Multiplikation von 2 Matrizen

Ist A eine (n, m)–Matrix und B eine (m, k)–Matrix, so heißen A und B **multiplizierbar** (d.h., die Anzahl der *Spalten* von A muss mit der Anzahl der *Zeilen* von B übereinstimmen).

Die Produktmatrix $C = A \cdot B$ ist eine (n, k)–Matrix, und die Elemente c_{ij} ergeben sich als *Skalarprodukt* der i–ten Zeile von A mit der j–ten Spalte von B, also

$$c_{ij} \;=\; \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj} \qquad (i = 1, \ldots, n;\; j = 1, \ldots, k).$$

Die Durchführung der Matrizenmultiplikation kann mit Hilfe des sogenannten **Falk-Schemas** erfolgen:

$$\begin{array}{cc}
 & B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix} \\
A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix} = C
\end{array}$$

Beispiel 6.2.4: Wir betrachten die beiden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

Wir bemerken zunächst, dass sowohl das Matrizenprodukt $A \cdot B$, als auch $B \cdot A$ berechenbar ist.

Wir erhalten

$$\begin{array}{cc}
 & B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\
A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) & 0 \cdot 7 + 3 \cdot 3 & 3 \\ 4 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) & 4 \cdot 7 + 2 \cdot 3 & 26 \\ 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 3 & 6 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Somit ergibt sich für $A \cdot B$ die $(3,3)$-Matrix

$$\begin{bmatrix} -6 & 9 & 3 \\ 12 & 34 & 26 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Für $B \cdot A$ hingegen erhalten wir folgendes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \cdot 0 + 7 \cdot 4 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 0 \\ (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 & (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

Somit ergibt sich für $B \cdot A$ die $(2,2)$-Matrix

$$\begin{bmatrix} 34 & 26 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 6.2.5: Wie wir grade schon im letzten Beispiel gesehen haben, ist die Matrizenmultiplikation (bis auf wenige Ausnahmen) *nicht* kommutativ, das heißt im Allgemeinen gilt

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Allerdings gilt trotzdem das *Assoziativgesetz*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{n,m}, B \in \mathbb{R}^{m,k} \quad \text{und } C \in \mathbb{R}^{k,l}.$$

Auch die *Distributivgesetze* werden erfüllt.

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{R}^{n,m} \quad \text{und } C \in \mathbb{R}^{m,k}$$

sowie

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{n,m} \quad \text{und } B, C \in \mathbb{R}^{m,k}$$

5. Determinantenberechnung

a) Determinante einer zweireihigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

b) Determinante einer dreireihigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$. Zunächst benutzen wir zur Berechnung die sogenannte *Regel von Sarrus*. Die Berechnung erfolgt dabei nach dem folgenden Schema.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Formelmäßig drückt sich das wie folgt aus.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Zu beachten ist dabei, dass die Regel von Sarrus nur für $(3,3)$–Matrizen benutzt werden kann.

c) Berechnung von Determinanten einer quadratischen (n,n)–Matrix mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatz. Diese Methode ist also allgemein gültig. Wir betrachten zunächst aber erstmal wieder den „einfachen“ Fall für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$. Wir stellen dazu die Ausgangsmatrix mit einem Vorzeichenschema gegenüber, welches immer abwechselnd „+“ und „−“ Zeichen enthält. Das sieht dann wie folgt aus.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Man wählt sich nun eine beliebige Zeile oder Spalte nach welcher man „entwickeln“ möchte. Dabei empfiehlt es sich die Wahl so zu treffen, dass man in der gwählten Zeile oder Spalte möglichst viele „Nullen“ hat. Wir „entwickeln“ nun beispielhaft nach der ersten Zeile (aber wie gesagt, wir hätten auch die 3. Spalte nehmen können). Dann ergibt sich folgendes.

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} &= +a_{11}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} - a_{12}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix} \\ &\quad + a_{13}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Beispiel 6.2.6: Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\det(A) = 1\cdot 4 - 2\cdot(-3) = 10.$$

Beispiel 6.2.7: Sei

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -3 & (x-4) \end{bmatrix}.$$

Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ ist $\det(A) = 18$?
Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A) = x\cdot(x-4) - 2\cdot(-3) = x^2 - 4x + 6 &\overset{!}{=} 18 \\ \Longrightarrow 0 &\overset{!}{=} x^2 - 4x - 12 \\ \Longrightarrow x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{4+12} \\ \Longrightarrow x_1 &= 6 \wedge x_1 = -2\end{aligned}$$

Beispiel 6.2.8: Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dann ergibt sich mit der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1\cdot 4\cdot(-1) + 2\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot(-3)\cdot 3 - 2\cdot(-3)\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 3 - 0\cdot 4\cdot 1 \\ &= -4 + 4 + 0 - 6 - 6 - 0 \\ &= -12.\end{aligned}$$

Mit dem Entwicklungssatz von Laplace erhalten wir beim „Entwickeln“ nach der 1. Zeile

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-4 - 6) - 2 \cdot (3 - 2) = -10 - 2$$
$$= -12.$$

Beispiel 6.2.9: Wir betrachten die Vektoren $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und möchten den Flächeninhalt des Parallelogramms berechnen, welches von den beiden Vektoren in der Ebene aufgespannt wird. Dazu muss nur die Determinante der Matrix $[\vec{x} \mid \vec{y}]$ berechnet werden. Es ergibt sich

$$A_P = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

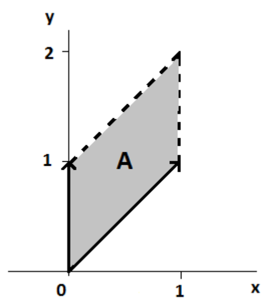

Abbildung 6.2: Flächeninhalt eines Parallelogramm

Bemerkung 6.2.10: Es gelten die folgenden Rechenregeln für Determinanten. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) $\det(A^t) = \det(A)$

b) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

c) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

d) $\det(E_n) = 1$

6. Inverse Matrizen

Definition 6.2.11: Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt invertierbar, falls eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ existiert, so dass

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n.$$

Die Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ wird dann als Inverse (Matrix) von A bezeichnet.

Satz 6.2.12: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist invertierbar $\iff$ $\det(A) \neq 0$.

Nun stellt sich natürlich die Frage, wie wir denn inverse Matrizen berechnen können. Dazu betrachten wir zunächst den Fall $n = 2$.

Sei

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Beispiel 6.2.13: Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst die Determinante von A. Es ist $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$. Somit ergibt sich

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ferner ergibt die Probe

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für höhere Dimensionen erweist sich die Berechnung der Inversen als etwas schwieriger. Wir stellen im Folgenden für den Fall $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ zwei Möglichkeiten zur Berechnung vor, welche sich auch auf die Fälle $n = 4,\ n = 5, \ldots$ übertragen lassen. Dazu betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimmung der Inversen mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

Wir schreiben das Zahlenschema der Matrix in die linke Spalte einer Tabelle und rechts die Einheitsmatrix. Ziel ist es nun auf der linken Seite die Einheitsmatrix zu erhalten.

A	A^{-1}	Umformung
$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$II - 4III$
$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$III + 2I$
$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}$	$I + II$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}$	$III + 2II$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \end{matrix}$	$III \leftrightarrow II$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{matrix}$	

Somit haben wir die Inverse der Matrix A gefunden, es ist

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Fassen wir dieses Verfahren also nochmal zusammen.

a) Schreibe das Zahlenschema der Matrix in die linke Spalte einer Tabelle und rechts die Einheitsmatrix.

b) Stelle mit Hilfe sogenannter elementarer Zeilenumformungen auf der linken Seite die Einheitsmatrix auf. Dazu gehören:

   – Tauschen von Zeilen

   – Multiplizieren einer Zeile mit einer beliebigen Zahl (außer 0!!)

   – Addieren und Subtrahieren einer Zeile von einer anderen Zeile (natürlich auch mit Vielfachen der Zeilen)

   Beachte: Alle Umformungsschritte müssen simultan auch auf der rechten Seite durchgeführt werden.

c) Wenn links die Einheitsmatrix steht, kann rechts die Inverse der Ausgangsmatrix abgelesen werden.

Bestimmung der Inversen mit Hilfe der Adjunktenformel

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^t_{adj},$$

wobei A_{adj} die sogenannte Adjunkte Matrix von A ist. Für dieses Verfahren benötigen wir die Determinantentheorie und es wird schnell sehr rechenaufwändig. So muss man zur Bestimmung der Inversen einer $(4,4)$-Matrix schon 17(!!) Determinaten berechnen. Spezialisieren wir uns also auf den Fall $A \in \mathbb{R}^{3,3}$. Für

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

gilt

$$A_{adj} = \begin{bmatrix} +\det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} & +\det\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} b & c \\ h & i \end{bmatrix} & +\det\begin{bmatrix} a & c \\ g & i \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} a & b \\ g & h \end{bmatrix} \\ +\det\begin{bmatrix} b & c \\ e & f \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix} & +\det\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Beispiel 6.2.14: Wir betrachten wieder die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und wollen die Inverse von A diesmal mit der Adjunktenformel bestimmen. Zunächst bestimmen wir die Determinante von A. Es ist

$$\det(A) = 0 + 0 + 8 - 1 - 0 - 8 = -1.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} A_{adj} &= \begin{bmatrix} +\det\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & +\det\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & +\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ +\det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} & +\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A_{adj}^{t} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}^{t} = - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

6.3 Lineare Abbildungen

Definition 6.3.1: Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt linear, falls

a) $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$ für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ (Additivität)

b) $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (Homogenität).

Beispiel 6.3.2: Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3y \end{bmatrix}$$

Wir zeigen, dass f tatsächlich eine lineare Abbildung ist. Dazu müssen wir die beiden Eigenschaften aus der Definition nachweisen (also die Additivität und Homogenität). Seien

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(\vec{v}+\vec{w}) &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} (x_1+x_2) - 2(y_1+y_2) \\ 3(y_1+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2 \\ 3y_1 + 3y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 - 2y_1 \\ 3y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - 2y_2 \\ 3y_2 \end{bmatrix} \\
&= f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})
\end{aligned}$$

Bleibt noch die Homogenität zu zeigen. Es sei also $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot \vec{v}) &= f\left(\lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} (\lambda \cdot x) - 2(\lambda \cdot y) \\ 3(\lambda \cdot y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot (x - 2y) \\ \lambda \cdot 3y \end{bmatrix} \\
&= \lambda \cdot \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3y \end{bmatrix} \\
&= \lambda \cdot f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \lambda \cdot f(\vec{v})
\end{aligned}$$

Somit haben wir bewiesen, dass es sich bei f um lineare Abbildung handelt.

Beispiel 6.3.3: Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3y + 1 \end{bmatrix}$$

Wir zeigen nun, dass f keine lineare Abbildung ist. Dazu reicht es ein Gegenbeispiel zu finden. Wir wählen zum Beispiel den Vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und

$\lambda = 2$. Dann müsste laut der Homogenitätseigenschaft eigentlich gelten, dass $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$. Wir erhalten allerdings

$$2 \cdot f(\vec{v}) = 2 \cdot f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 - 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sowie

$$f(2 \cdot \vec{v}) = f\left(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 - 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Somit ist die Homogenitätseigenschaft verletzt und wir haben gezeigt, dass f keine lineare Abbildung ist.

Satz 6.3.4: Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, so dass $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$.

Beispiel 6.3.5: Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3y \end{bmatrix}.$$

Da es sich bei f um eine lineare Abbildung handelt (wie wir bereits gezeigt haben) existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, so dass $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Sei

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Es ist

$$A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3y \end{bmatrix} = f(\vec{v})$$

Koeffizientenvergleich liefert: $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$ sowie $d = 3$. Somit ist die zur linearen Abbildung f dazugehörige Koeffizentenmatrix gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Satz 6.3.6: Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und A die dazugehörige Koeffizentenmatrix. Dann besitzt f eine Umkehrabbildung f^{-1} genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$.

Bemerkung 6.3.7: Um die Umkehrabbildung zu bestimmen, muss die Inverse der Koeffizientenmatrix A berechnet werden.

Beispiel 6.3.8: Wir betrachten erneut die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3y \end{bmatrix}$$

und der dazugehörigen Koeffizentenmatrix gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Untersuchen wir zunächst, ob f eine Umkehrabbildung besitzt. Es ist

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 0 = 3 \neq 0.$$

Die Umkehrabbildung f^{-1} existiert also. Die Inverse von A ist gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Umkehrabbildung

$$f^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}y \end{bmatrix}.$$

6.4 Lineare Gleichungssysteme

Ein System

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ heißt Lineares Gleichungssystem(LGS) mit n Gleichungen und m Unbekannten. Wir können das LGS auch in Matrix-Vektor-Form darstellen. Das sieht dann wie folgt aus

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{=\vec{b}}$$

oder kurz $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ wird als Koeffizientenmatrix bezeichnet. Ferner ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ der gesuchte Lösungvektor und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ die sogenannte Inhomogenität. Ist $\vec{b} = \vec{0}$, so spricht man von einem homogenen LGS, sonst von einem inhomogenen. Die Matrix

$$A_{erw} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right]$$

heißt erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Zur Berechnung der Lösungsmenge können die folgenden elementaren Umformungen durchgeführt werden:

a) Vertauschen von Zeilen

b) Addieren oder Subtrahieren des Vielfachen einer Zeile zum bzw. vom Vielfachen einer anderen Zeile

c) Multiplizieren einer Zeile mit einer beliebigen Zahl (außer 0!!)

d) Vertauschen von Spalten (hierbei ist Vorsicht geboten, da dies zu einer Umnummerierung der Unbekannten führt)

Ziel ist die erweiterte Koeffiezientenmatrix in die folgende Gestalt umzuformen.

$$A_{erw} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & a^*_{1m} & b^*_1 \\ 0 & 1 & \dots & a^*_{2m} & b^*_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b^*_n \end{array}\right]$$

Man bezeichnet diese Gestalt der erweiterten Koeffizientenmatrix auch als *Zeilenstufenform.* Die elementaren Umformungen ändern nichts an der Lösungsmenge des LGS, das heißt es spielt keine Rolle, ob wir das ursprüngliche System lösen oder das durch die Umforungen vereinfachte LGS. Im letzteren Fall ist es allerdings wesentlich einfacher, die Lösungsmenge zu bestimmen. Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 6.4.1: Wir versuchen, die Lösung von folgendem LGS zu bestimmen.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Umgeschrieben in Matrix-Vektor-Form erhalten wir

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\vec{b}}$$

und somit ergibt sich folgende erweiterte Koeffizientenmatrix

$$A_{erw} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III-I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II-2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{0{,}5\cdot III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-0{,}2\cdot III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5 \end{array}\right] \xrightarrow{I-III, I-2II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II\leftrightarrow III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Wir haben hier also ein Beispiel für ein LGS gefunden, welches eine eindeutige Lösung besitzt. Insbesondere ist

$$x = 1,\ y = -0,5 \ \text{ und } \ z = 0.$$

Beispiel 6.4.2: Wir betrachten nun das folgende LGS.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Umgeschrieben in Matrix-Vektor-Form ergibt sich

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\vec{b}}$$

und somit ergibt sich folgende erweiterte Koeffizientenmatrix

$$A_{erw} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II-3I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III+II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Die letzte Zeile könnte man auch schreiben als $0 = 2$, da dies aber mit Sicherheit nicht der Fall ist, haben wir also einen Widerspruch bzw. eine falsche Aussage gefunden. Somit besitzt das LGS keine Lösung.

Beispiel 6.4.3: Wir betrachten nun das folgende LGS.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Umgeschrieben in Matrix-Vektor-Form ergibt sich

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{=\vec{b}}$$

und somit ergibt sich folgende erweiterte Koeffizientenmatrix

$$A_{erw} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{II-3I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{III+II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Diesmal ist eine komplette Nullzeile entstanden. Das LGS hat unendlich viele Lösungen. Wir betrachten die zweite Zeile, es ist

$$-2y - z = 2 \iff z = -2 - 2y.$$

Wir wählen $y = t, \quad t \in \mathbb{R}$ und somit $z = -2 - 2t$. Die erste Zeile ergibt

$$x + y = -1 \iff x = -1 - y.$$

Folglich haben wir $x = -1 - t$. Zusammengefasst lautet der Lösungsvektor also

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Wir haben gesehen, dass bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen drei Fälle auftreten können. Ist die Koeffiezientenmatrix A quadratisch, so kann man folgendes Kriterium benutzen um festzustellen, ob das LGS eindeutig lösbar ist oder nicht (in diesem Fall bleibt noch die Möglichkeit, dass es gar keine Lösung oder aber unendlich viele Lösungen besitzt).

Satz 6.4.4: Sei $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dann ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

Beispiel 6.4.5: Wir betrachten das LGS

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für welche Werte von λ ist das LGS eindeutig lösbar?
Um diese Frage zu beantworten, berechnen wir die Determinante der Koeffizientenmatrix A. Es ist

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-\lambda)\cdot\lambda\cdot 0 + 0\cdot(-\lambda)\cdot\lambda + (1-\lambda)\cdot 0\cdot 0\\ &\quad - 0\cdot 0\cdot 0 - (-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot 0 - (1-\lambda)\cdot\lambda\cdot\lambda\\ &= -\lambda^2\cdot(1-\lambda) \stackrel{!}{=} 0\\ &\Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \wedge \quad \lambda_2 = 1\end{aligned}$$

Folglich ist das LGS eindeutig lösbar für $\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \neq 1$.

Die Cramersche Regel

Wir betrachten das eindeutig lösbare LGS $A\cdot\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\det(A) \neq 0$. Dann ist die eindeutige Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ gegeben durch

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei die Matrix A_i dadurch entsteht, dass die i-te Spalte in der Koeffizientenmatrix A durch $\vec{b}$ ersetzt wird, das heißt

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Beispiel 6.4.6: Wir betrachten das LGS.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1\\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

Umgeschrieben in Matrix-Vektor-Form ergibt sich

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}}_{=\vec{b}}.$$

Dann gilt $\det(A) = 1+1-1+1+1+1 = 4$ sowie

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \implies \det(A_1) = 1+1-1+1 = 2 \quad \implies x_1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \implies \det(A_2) = 1+1+1+1 = 4 \quad \implies x_2 = 1$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \implies \det(A_3) = -1-1-1+1 = -2 \quad \implies x_3 = -\frac{1}{2}$$

6.5 Geometrische Anwendungen im $\mathbb{R}^3$

1. **Geraden im Raum**

   a) *Punktrichtungsgleichung in Parameterform*

      Gegeben seien ein Punkt P_0, der auf der Geraden g liegt, und ein Vektor $\vec{a}$, der die Richtung der Geraden g angibt.

      $$\implies \quad g : \vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{a} \quad (t \in \mathbb{R})$$

      Dabei ist $\vec{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ der Ortsvektor von Punkt P_0 und $t \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Parameter.

   b) *Zweipunktegleichung*

      Gegeben seien die Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$, die auf der Geraden g liegen.

      $$\implies \quad g : \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

      Dabei ist

      $$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}.$$

2. **Ebenen im Raum**

a) *Vektorielle Form der Ebenengleichung - Parameterdarstellung*

Gegeben seien die Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ und $P_3(x_3, y_3, z_3)$. Dann kann die Ebene E, auf welcher die drei Punkte liegen, wie folgt dargestellt werden

$$\Longrightarrow \quad E : \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_3} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

b) *Normalenform*

Gegeben sei die Ebene in Parameterdarstellung $E : \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$. Um die Normalenform der Ebene zu betimmen, müssen wir zunächst den Normalenvektor der Ebene bestimmen. Dieser ist gegeben durch

$$\vec{n_E} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}.$$

Dann ist die Normalenform von E gegeben durch

$$E : \left[\vec{x} - \overrightarrow{OP_1}\right] \circ \vec{n_E} = 0$$

c) *Koordinatenform (parameterfreie Darstellung)*

Gegeben sei die Normalenform $E : \left[\vec{x} - \overrightarrow{OP_1}\right] \circ \vec{n_E} = 0$. Berechnet man dieses Skalarprodukt, dann ergibt sich nach einigen Umformungen eine Ebenengleichung der Gestalt

$$E : ax + by + cz = d \;\text{ mit }\; a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

die sogenannte Koordinatenform.

d) *Abstand d eines Punktes P_0 von der Ebene E*

Gegeben sei $E : ax + by + cz = d$ und der Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Dann ist der Abstand d eines Punktes P_0 von der Ebene E gegeben durch

$$d(P_0, E) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

Beispiel 6.5.1: Gegeben seien die Punkte $P(1|0|1)$, $Q(3|1|1)$, $A(1|2|3)$, $B(1|2|4)$ und $C(1|3|3)$

a) Bestimmen Sie die Gerade g, welche durch die Punkte P und Q geht.

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ} \Longrightarrow g : \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Parameter-, Normalen- und Koordinatenform der Ebene E, in welcher die Punkte A, B und C liegen.

$$E : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} \Longrightarrow E : \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow E : \left[\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right] \circ \vec{n_E} = 0 \;\text{ somit }\; E : \left(\vec{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow (x-1) \cdot 1 = 0 \Longrightarrow E : x = 1$$

c) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt von g und E.

Wir müssen dazu g und E gleichsetzen. Aus der Gleichnug für g ergibt sich $x = 1 + 2t$ und folglich durch einsetzen in E

$$1 + 2t = 1 \Longleftrightarrow t = 0 \Longrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow S(1|0|1)$$

d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $R(2|1|1)$ von der Ebene E.

$$d(R, E) = \left| \frac{2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} \right| = 1$$

e) Gehört R zur Geraden g? Dazu müssen wir eine Punktprobe machen. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 1t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da hier ein Widerspruch entsteht gehört der Punkt R somit nicht zur Geraden g.

8. Aufgabe: Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (\lambda+1)x_1 + (\lambda+1)x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ \lambda x_1 + 3x_2 + (\lambda+2)x_3 &= -1 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar? Geben Sie die Lösung für $\lambda = 0$ an. Wann besitzt das System unendlich viele Lösungen, wann keine? Geben Sie für den Fall unendlich vieler Lösungen diese an.

Hinweis: Benutzen Sie die Matrixschreibweise, die Determinantentheorie, sowie den Gauss-Algorithmus!

9. Aufgabe: Berechnen Sie die Matrixprodukte $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Diskutieren Sie das Ergebnis.

10. Aufgabe: Gegeben sind Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt und Schnittwinkel von g und h.

b) Bestimmen Sie die Koordinatenform der Ebene E, die die Geraden g und h enthält.

c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(3|2|1)$ von der Ebene E.

d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden

$$i : \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und der Ebene E.

Kapitel 7

Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1 Zufälliges Ereignis, Wahrscheinlichkeit und kombinatorische Grundlagen

Ein zufälliger Vorgang oder Zufallsexperiment ist ein Vorgang, bei dem vor Ablauf des Vorgangs das Ergebnis nicht bekannt ist. Die Wiederholung eines solchen Vorgangs nennt man Versuch. Ein zufälliger Vorgang ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

1. Alle möglichen Ausgänge sind vor Ablauf des Vorgangs bekannt.
2. Vor jedem Versuch ist der Ausgang des Versuchs unbekannt.
3. Der Vorgang kann unter gleichen Bedingungen wiederholt werden.

Mathematisch werden die möglichen Ausgänge durch eine Menge, den Ergebnisraum (oder Grundraum) Ω beschrieben.

Beispiel 7.1.1:

1. Werfen eines Würfels: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$
2. Anzahl der Telefonanrufe in einer Zentrale in einem bestimmten Zeitintervall: $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$
3. Messung der Körperhöhe eines 12-jährigen Schülers: $\Omega = (0, \infty)$
4. Antwort bei einer Befragung: $\Omega = \{\text{JA, NEIN}\}$

Ein **zufälliges Ereignis:** (*random event*) ist eine Menge von möglichen Ausgängen; und wird durch eine Teilmenge von Ω, d.h. $A \subseteq \Omega$, charakterisiert.

Beispiel 7.1.2:

1. geworfene Augenzahl ist Eins $A = \{1\}$
2. weniger als 100 Anrufe $A = \{0, \ldots, 99\}$
3. Schüler ist größer als 150 cm $A = (150, \infty)$
4. Antwort lautet 'JA' $A = \{\text{JA}\}$

Die Darstellung von zufälligen Ereignissen in Form von Mengen gestattet es, interessierende Ereignisse durch Mengenverknüpfungen zu beschreiben:

Zufälliges Ereignis $A \subseteq \Omega$ $B \subseteq \Omega$		Beispiel: Werfen eines Würfels A - Werfen einer geraden Zahl $A = \{2,4,6\}$ B - Werfen einer Zahl größer als 4 $\Rightarrow$ $B = \{5,6\}$
A tritt nicht ein	$\overline{A}$, A^c	$\overline{A} = \{1,3,5\}$, $\overline{B} = \{1,2,3,4\}$
A *oder* B tritt ein	$A \cup B$	$A \cup B = \{2,4,5,6\}$
A *und* B treten ein	$A \cap B$	$A \cap B = \{6\}$
unmögliches Ereignis	$\emptyset$ (leere M.)	
sicheres Ereignis	Ω	$\{1,\ldots,6\}$
A und B sind unvereinbar	$A \cap B = \emptyset$	$B_1 = \{1,3\}$ $\Rightarrow$ $A \cap B_1 = \emptyset$

Jedem Ereignis $A \subseteq \Omega$ wird eine Zahl $P(A)$ zugeordnet, die Wahrscheinlichkeit von A. Diese drückt aus, mit welcher Wahrscheinlichkeit A eintritt. Für die Wahrscheinlichkeit gilt:

1. $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$
2. $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$
3. Wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ unvereinbar ($\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$), dann

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B).}$$

Aus diesen Axiomen kann man ableiten

4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5. Für beliebige Ereignisse A und B gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

6. $A \subseteq B$, dann $P(A) \leq P(B)$

Die ersten drei Bedingungen,[1] die die Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie bilden und von Kolmogorov (1933) formuliert wurden, spiegeln wesentliche Eigenschaften der relativen Häufigkeit und der sogenannten klassischen Wahrscheinlichkeit wider:

- **Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit:** Ein Zufallsexperiment wird n-mal unter gleichen Bedingungen wiederholt. Dann gilt für die relative Häufigkeit $h_n(A)$ des Eintretens von A
  $0 \leq h_n(A) \leq 1$, für zwei Ereignisse A und B mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$. Betrachten wir das sichere Ereignis, dann gilt $h_n(\Omega) = 1$. Für eine sehr große Anzahl n von Wiederholungen gilt:
  $$h_n(A) \approx P(A).$$

- Die Formel der **klassischen Wahrscheinlichkeit** liefert eine Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, wenn alle Ausgänge in Ω gleichwahrscheinlich sind:
  $$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl aller möglichen Ausgänge}} \\ &= \frac{\text{Anzahl der Elemente in } A}{\text{Anzahl der Elemente in } \Omega}. \end{aligned}$$
  Um die Anzahlen der Elemente in A und Ω zu berechnen, benutzt man häufig Formeln aus der **Kombinatorik**.

Schauen wir uns also einige Grundlagen aus der Kombinatorik an.

Permutation: Unter einer Permutation versteht man die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten von n Objekten. Im Spezialfall, dass alle Objekte unterscheidbar sind (es also keinen identischen Objekte gibt), hat man genau $n!$ Möglichkeiten. Sofern es allerdings nicht unterscheidbare bzw. identische Objekte gibt, so gibt es genau

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_l!}$$

Möglichkeiten zur Anordnung. Dabei ist

$$\sum_{i=1}^{l} n_i = n$$

und n_i entspricht der Anzahl identischer Objekte vom Typ i.

[1] Streng mathematisch lautet die dritte Bedingung

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

für Ereignisse $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$

Beispiel 7.1.3: Ein Elektronikladen möchte sein Schaufenster mit 4 roten, 2 weißen, 3 grünen und 5 blauen Glühlampen in einer Reihe schmücken.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn es keine weiteren Einschränkungen gibt, das heißt alle Glühlampen unterscheidbar sind?

   Da es insgesamt 14 verschiedene Glühlampen gibt, haben wir also genau

$$14! = 87178291200 \text{ Möglichkeiten.}$$

b) Im Folgenden gelten die Lampen gleicher Farbe als nicht unterscheidbar. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

   1. die Glühlampen gleicher Farbe jeweils an einem Stück angeordnet werden sollen?

      Da die Lampen gleicher Farbe nicht mehr zu unterscheiden sind, erhalten wir also insgesamt 4 verschiedene Gruppen (rot, weiß, grün, blau) und wir haben also genau

$$4! = 24 \text{ Möglichkeiten.}$$

   2. die Reihe mit 2 roten Glühlampen anfangen und aufhören soll?

      Die roten Lampen sind fest. Es bleiben also noch 10 Lampen. Für diese gibt es genau

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = 2520 \text{ Möglichkeiten zur Anordnung.}$$

c) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit dafür, dass folgende Reihenfolge entsteht, wenn es wie bei b) keine Unterscheidung zwischen Lampen gleicher Farbe gibt:
   rrrrwwgggbbbbb

   Wir definieren zunächst das Ereignis $A = \{rrrrwwgggbbbbb\}$ und somit $|A| = 1$. Nun müssen wir noch die Anzahl aller möglichen Ereignisse, sprich $|\Omega|$ bestimmen. Wir haben insgesamt 14 Lampen. Für diese gibt es genau

$$\frac{14!}{4! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 5!} = 2522520 \text{ Möglichkeiten zur Anordnung.}$$

   Also ist $|\Omega| = 2522520$ und folglich erhalten wir

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2522520} \approx 4 \cdot 10^{-7}.$$

Variation: Unter einer Variation versteht man die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten bei Auswahl von k Elementen aus n Objekten unter Beachtung der Reihenfolge (man spricht auch von einer geordneten Stichprobe). Falls man davon ausgeht, dass die Elemente wieder zurück gelegt werden (*mit Wiederholung*), so gibt es genau n^k Möglichkeiten zur Anordnung. Sofern die Elemente nicht zurück gelegt werden (*ohne Wiederholung*), so gibt es genau

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten zur Anordnung.

Beispiel 7.1.4: Bei einem Test mit 5 Fragen gibt es jeweils 4 Antwortmöglichkeiten. Angenommen Sie haben überhaupt keine Ahnung und raten bei allen Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit alle Fragen richtig zu beantworten?

Wir definieren zunächst das Ereignis A = „Alle Antworten sind richtig". Dies kann natürlich nur in einem Fall auftreten und somit ist $|A| = 1$. Nun müssen wir wieder die Anzahl aller möglichen Ereignisse, sprich $|\Omega|$ bestimmen. Wir haben 5 Fragen mit 4 Antworten. Man kann sich das nun wie folgt vorstellen. Wir haben eine Urne mit 4 nummerierten Kugeln. Dann ziehen wir eine Kugel und legen diese zurück, was wir noch viermal wiederholen. Dabei spielt die Reihenfolge natürlich eine Rolle. Es ergeben sich somit $4^5 = 1024$ Möglichkeiten. Also ist $|\Omega| = 1024$ und folglich erhalten wir

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{1024} \approx 0,000977.$$

Man sieht, dass die Wahrscheinlichkeit sehr gering ist, obwohl der Test aus nur 5 Fragen bestanden hat. Lernen zahlt sich also aus.

Beispiel 7.1.5: Einer Gruppe von 10 Studenten werden 4 Kinokarten angeboten. Wie viele Möglichkeiten zur Verteilung gibt es, wenn sich die Karten auf nummerierte Sitzplätze beziehen und jeder Student nur eine Karte bekommen kann?

Hier ziehen wir natürlich ohne Wiederholung, wenn eine Karte weg ist, dann kann sie ja kein zweites mal rausgegeben werden und da diese auch zusätzlich noch nummeriert sind, spielt die Reihenfolge natürlich eine Rolle. Es ergeben sich somit

$$\binom{10}{4} \cdot 4! = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{3628800}{720} = 5040$$

Möglichkeiten die Karten zu verteilen.

Kombination: Unter einer Kombination versteht man die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten bei Auswahl von k Elementen aus n Objekten ohne Beachtung der Reihenfolge (man spricht auch von einer ungeordneten Stichprobe). Falls man davon ausgeht, dass die Elemente wieder zurück gelegt werden (*mit Wiederholung*), so gibt es genau

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Möglichkeiten zur Anordnung. Sofern die Elemente nicht zurück gelegt werden (*ohne Wiederholung*), so gibt es genau

$$\binom{n}{k}$$

Möglichkeiten zur Anordnung.

Beispiel 7.1.6: Angenommen an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät einer Universität lehren acht Professoren für Mathematik, sechs für Physik, sieben für Biowissenschaften und sechs für Chemie. Es soll nun eine siebenköpfige Kommission gebildet werden. Selbstverständlich sind alle Professoren Individuen und somit voneinander unterscheidbar.

a) Wieviele Möglichkeiten für eine solche Kommission gibt es, wenn keine Einschränkungen bezüglich der Zusammensetzung vorgegeben sind?

   Insgesamt lehren $n = 8 + 6 + 7 + 6 = 27$ Professoren an der Fakultät. Von diesen sollen $k = 7$ für die Kommission gewählt werden. Dabei spielt die Reihenfolge natürlich keine Rolle und da niemand doppelt gewählt werden kann, haben wir also eine Kombination ohne Wiederholung. Folglich ergeben sich

$$\binom{27}{7} = 888030$$

   Möglichkeiten zur Bildung dieser Kommission.

b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn genau 2 Mathematiker zur Kommission gehören sollen?

   Wir wählen von den 8 Mathmatikern zunächst 2 aus. Dafür gibt genau

$$\binom{8}{2} = 28$$

   Möglichkeiten. Bleiben also noch 19 Professoren übrig, von denen 5 in die Kommission können. Dafür haben wir also genau

$$\binom{19}{5} = 11628$$

Möglichkeiten. Folglich ergeben sich

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{19}{5} = 28 \cdot 11628 = 325584$$

Möglichkeiten zur Bildung der Kommission, welche genau 2 Mathematiker enthalten soll.

Beispiel 7.1.7: Angenommen Sie gehen mit vier Kommilitonen in die Mensa. Es stehen 6 Gerichte zur Auswahl. Sie sollen das Essen für sich und Ihre vier Kommilitonen besorgen, wobei allen egal ist, was sie essen. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?

Hierbei handelt es sich um eine Kombination mit Wiederholung, da jedes Essen ja auch öfter als ein mal genommmen werden kann. Es ergeben sich somit

$$\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

Möglichkeiten die Speisen zu wählen.

7.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 7.2.1: Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** (*conditional probability*) des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B mit $(P(B) > 0)$ eintritt, ist definiert durch

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Eine wichtige Formel ist die **Formel der totalen Wahrscheinlichkeit**: Die Grundmenge Ω wird in unvereinbare Ereignisse B_j, $j = 1, \dots, k$ zerlegt: $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_k$, $B_j \cap B_i = \emptyset$ für $j \neq i$ und $P(B_j) > 0$.

Dann gilt für ein beliebiges Ereignis A

$$\boldsymbol{P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_k)P(B_k)} \qquad (7.2.1)$$

Häufig wird diese Formel im Zusammenhang mit der **Bayesschen Formel** angewendet. Für beliebige Ereignisse A und B mit positiver Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \qquad (7.2.2)$$

Formel (7.2.1) und (7.2.2) liefern zusammen

$$\boldsymbol{P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1) \;+\; \cdots + P(A|B_k)P(B_k)}}$$

Beispiel 7.2.2: Eine wichtige Anwendung für diese Formel ist die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei **falschen Positiv-Befunden** Wie definieren folgende Ereignisse:
B - beliebiges Individuum leidet an Krankheit K ;
A - Diagnoseverfahren liefert Aussage 'Individuum leidet an K'

Die Güte eines Diagnoseverfahrens wird angegeben durch folgende Wahrscheinlichkeiten:
$P(A|B)$ - Wahrscheinlichkeit, dass die vorhandene Krankheit K durch das Diagnoseverfahren erkannt wird
$P(A|\overline{B})$ - Wahrscheinlichkeit, dass ein gesundes Individuum durch das Diagnoseverfahren als an K erkrankt klassifiziert wird.

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig ausgewähltes Individuum, das einen positiven Befund erhalten hat, nicht an K erkrankt ist:

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(A|\overline{B})P(\overline{B})}{P(A)} = \frac{P(A|\overline{B})P(\overline{B})}{P(A|B)P(B) \;+\; P(A|\overline{B})(1 - P(B))}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig ausgewähltes Individuum, das einen negativen Befund erhalten hat, wirklich nicht an K erkrankt ist, ist gegeben durch

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|\overline{B})P(\overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{(1 - P(A|\overline{B}))(1 - P(B))}{1 - P(A|B)P(B) \;-\; P(A|\overline{B})(1 - P(B))}.$$

Bei der Beurteilung von Diagnoseverfahren werden häufig die Begriffe *Sensitivität* und *Spezifität* verwendet. Die Sensitivität eines Verfahrens charackterisiert die Wahrscheinlichkeit eines Verfahrens Kranke als krank zu erkennen:

$$\text{Sensitivität} = P(\text{ Diagnose krank } | \text{ Patient krank }).$$

Die Spezifität gibt die Wahrscheinlichkeit an, Gesunde als gesund zu klassifizieren:

$$\text{Spezifität} = P(\text{ Diagnose gesund } | \text{ Patient gesund });$$

das bedeutet, 1 - Spezifität ist die Wahrscheinlichkeit für einen falschen Positiv-Befund.

Nehmen wir nun an, dass 3% einer Population an einer bestimmten Krankheit leiden und dass ein gewisser Test 95% der Gesunden als gesund einstuft und 99% der Kranken als krank einstuft. Dann ergibt sich folgendes Baumdiagramm.

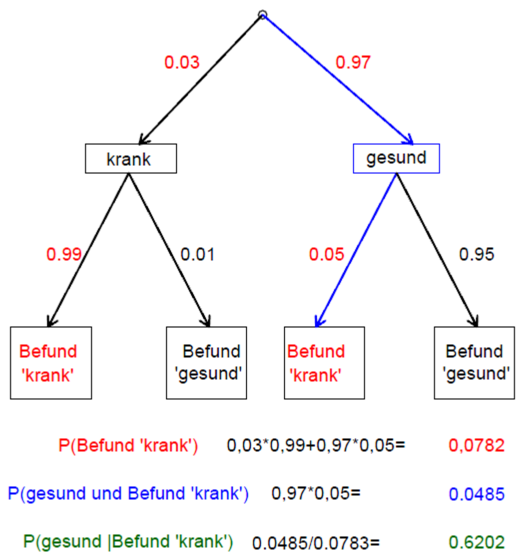

Abbildung 7.1: Zahlenbeispiel

7.3 Zufallsvariable und ihre Verteilung

Definition 7.3.1: Eine Variable X, deren Werte Ergebnis eines zufälligen Vorgangs sind, heißt **zufällige Variable (ZV)** (Zufallsvariable, Zufallszahl, Zufallsgröße, *random variable*). Sie heißt **diskret** (*discrete*), wenn sie endlich oder abzählbar unendlich viele Werte annimmt.

Die Verteilung einer **diskreten Zufallsvariablen** ist bestimmt durch die Angabe der möglichen Werte und die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Werte angenommen werden:

Werte $\boldsymbol{x_1^*, x_2^*, \ldots}$ und
Einzelwahrscheinlichkeiten $\boldsymbol{P(X = x_j^*)}$ oder $\boldsymbol{p(x_j^*)}$.

Wenn die möglichen Werte (nichtnegative) ganze Zahlen sind, so schreibt man häufig $p_k = P(X = k)$. Es gilt:

$$\sum_j P(X = x_j^*) = 1 \quad \text{und} \quad P(X = x_j^*) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad x_j^*.$$

Für numerische ZV betrachtet man die (kumulative) **Verteilungsfunktion F** (*cumulative distribution function, cdf*), die durch

$$\boldsymbol{F(t) = P(-\infty < X \le t) = \sum_{x_j^* \le t} P(X = x_j^*)}$$

definiert ist.

Die Verteilungsfunktion ist eine Sprung- oder Treppenfunktion (*step function*) mit Sprüngen an den Stellen x_j^* und Sprunghöhen $p(x_j^*)$.

Beispiel 7.3.2: Zwei Würfel werden geworfen. Die ZV X gibt dabei die Augensumme an. In der folgenden Tabelle findet man die möglichen Werte von X , die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Werte angenommen werden, gegeben und die Werte der Verteilungsfunktion.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_k = P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(k) = P(X \le k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$

Um Sachverhalte aus der Realität zu veranschaulichen benutzt man bestimmte Verteilungsmodelle. Im Folgenden wollen wir uns zwei wichtige diskrete Verteilungen anschauen.

7.3.1 Binomialverteilung

Ein zufälliger Vorgang, bei dem als Ausgang nur das Ereignis A (Erfolg) oder das Ereignis $\overline{A}$ (Misserfolg) auftreten kann, wird n-mal unter den gleichen Bedingungen wiederholt. Die Erfolgswahrscheinlichkeit sei p. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Erfolge; aus kombinatorischen Überlegungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P(X = k)} &= \boldsymbol{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \\ &= \boldsymbol{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k}} \qquad \text{für } \boldsymbol{k = 0, \ldots, n} \end{aligned}$$

Man sagt: X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p und schreibt

$$X \sim \mathrm{B}(n, p).$$

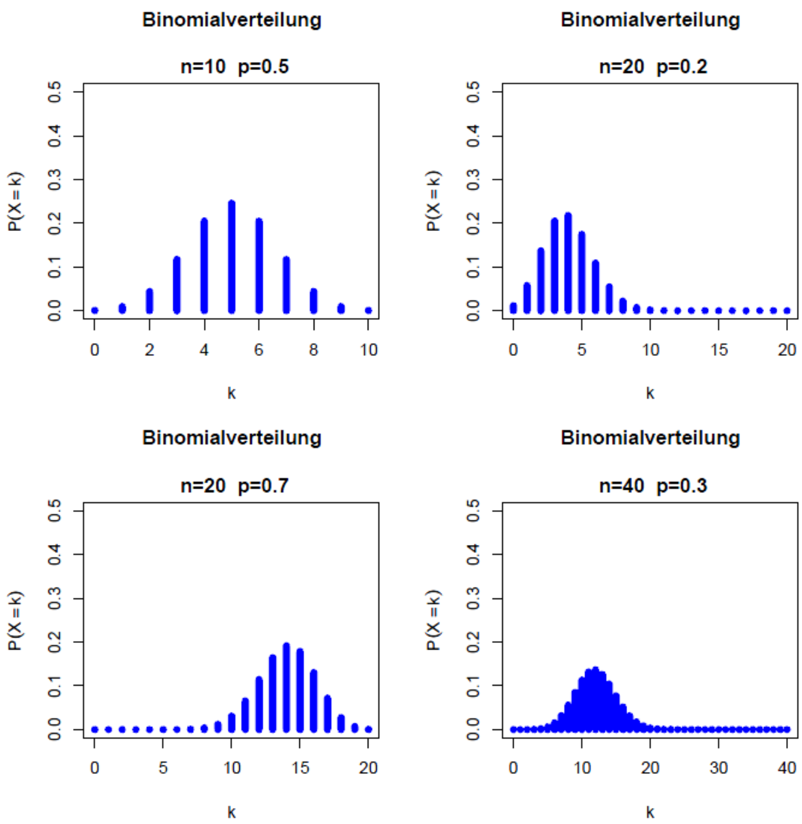

Abbildung 7.2: Binomialverteilungen mit verschiedenen Parametern

Beispiel 7.3.3: Langjährige Untersuchungen haben ergeben, dass die Wahrscheinlichkeit bei 92% liegt, dass die Biostudenten Montag früh pünktlich zur Vorlesung kommen (Angabe fiktiv). Angenommen wir befragen zufällig 10 Studenten aus dieser Gruppe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 8 pünktlich sind. Wir modellieren die Anzahl der pünktlichen Studenten durch die Zufallsgröße X. Dann gilt $X \sim \mathrm{B}(10; 0,92)$. Somit gilt

$$P(X=8) = \binom{10}{8} \cdot (0,92)^8 \cdot (1-0,92)^2 \approx 0,1478$$

7.3.2 Poissonverteilung

Sei die Erfolgswahrscheinlichkeit p bei der Binomialverteilung sehr klein und die Zahl n sehr groß, so dass $n \cdot p$ nahe einem Wert $\lambda > 0$ ist, dann kann man diesen Sachverhalt durch eine Poissonverteilte ZV beschreiben, d.h.

$$\boldsymbol{P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) \quad \text{für } k = 0, 1 \ldots.}$$

Die Schreibweise lautet: $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.

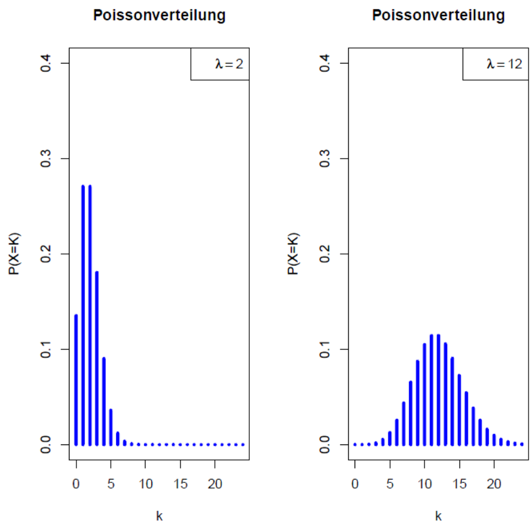

Abbildung 7.3: Poissonverteilungen mit verschiedenen Parametern

Beispiele für die Anwendung der Poissonverteilung sind: Anzahl ankommender Telefonanrufe in einer Telefonzentrale, Anzahl der Druckfehler in einem Buch, Anzahl von Bakterienkolonien.

Beispiel 7.3.4: Die Poissonverteilung ist für viele Probleme in der Biologie, insbesondere für die Schätzung der Dichte von Organismen, von Bedeutung. Als Beispiel betrachten wir die Feststellung der Anzahl von Hefezellen, die in einer Flüssigkeit suspendiert sind. Dazu wird ein Glasträger in 200 kleine gleichgroße Quadrate aufgeteilt; die Anzahl der Hefezellen in jedem Quadrat wird ausgezählt. Wir erhalten folgende absoluten Häufigkeiten Als Modell für diese Anzahl wählen

Hefezellen je Quadrat k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$H(k)$	75	103	121	54	30	13	2	1	0	1

wir $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda = 2$.

7.4 Stetige Zufallsvariablen und Verteilungen

Definition 7.4.1: Eine Zufallsvariable heißt **stetig** (*continuous*), wenn die möglichen Werte ein Intervall auf $\mathbb{R}$ bilden.

Die Verteilung einer **stetigen ZV** ist gegeben durch eine Funktion f, die **Dichte** (*density*), die auf der reellen Achse definiert ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine stetige ZV X einen Wert zwischen den Zahlen a und b $(a < b)$ annimmt, ist gegeben durch den Flächeninhalt unter f zwischen a und b, d.h.

$$\boldsymbol{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \text{und} \quad f(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x. \tag{7.4.1}$$

F ist die Verteilungsfunktion von X.

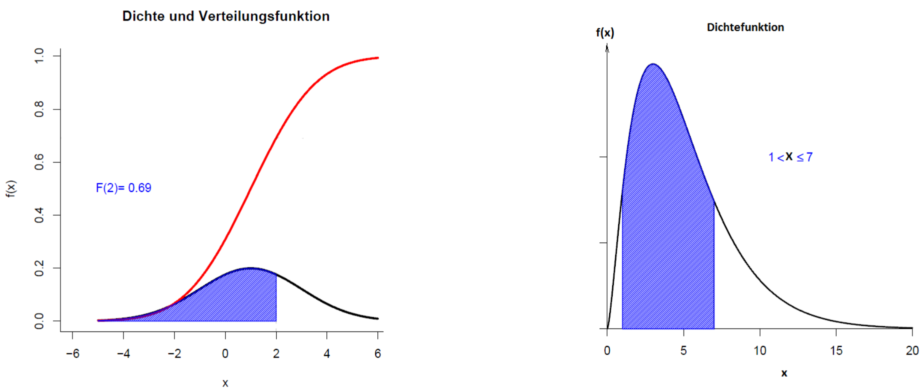

Abbildung 7.4: Dichte und Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen

Beispiel 7.4.2: Die folgende Funktion ist eine Dichte.

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_0^1 6x(1-x)\,dx = \int_0^1 (6x - 6x^2)\,dx \\ &= (3x^2 - 2x^3)\Big|_0^1 = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Für die dazugehörige Verteilungsfunktion gilt

$$F(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ZV X Werte zwischen $0,5$ und 1 annimmt gegeben durch

$$\begin{aligned} P(0,5 \leq X \leq 1) &= \int_0^{0,5} f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_0^{0,5} \\ &= F(1) - F(0,5) = 1 - (3 \cdot (0,5)^2 - 2 \cdot (0,5)^3) \\ &= 1 - (\frac{3}{4} - \frac{2}{8}) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bemerkung 7.4.3: Der Erwartungswert einer stetigen Zufallsgröße X mit der Dichte f ist gegeben durch

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx.$$

7.4.1 Die Exponentialverteilung

Definition 7.4.4: Eine Zufallsgröße X heißt exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$, falls X die folgende Dichtefunktion hat

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Man schreibt $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Ferner gilt für die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

Bemerkung 7.4.5: Die Exponentialverteilung stellt eine der bekanntesten und wichtigsten Lebensdauerverteilungen dar. Sie ist ein Spezialfall verschiedener anderer Lebensdauerverteilungen, wie zum Beispiel der Weibullverteilung. Außerdem lassen sich sich unter der Annahme des Exponentialmodells verhältnismäßig leicht statistische Verfahren entwickeln.

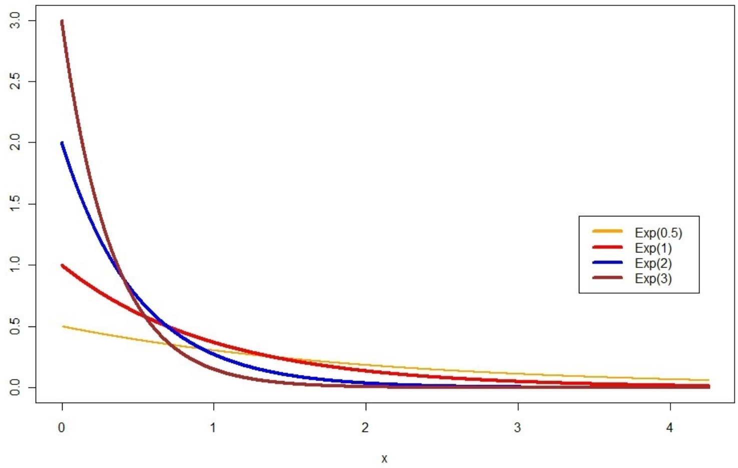

Abbildung 7.5: Dichtefunktionen von exponentialverteilten Zufallsgrößen mit unterschiedlichen Parametern

7.4.2 Die Normalverteilung

Die Normalverteilung ist die wichtigste stetige Verteilung. Die Dichtefunktion ist glockenförmig. Diese Verteilung wurde eingeführt durch den französischem Mathematiker de Moivre (1667-1754), um Wahrscheinlichkeiten, die im Zusammenhang mit der Binomialverteilung stehen, zu approximieren. Carl Friedrich Gauß (1777-1855) und Laplace (1749-1827) entdeckten, dass das Verhalten von zufälligen Messfehlern durch eine Glockenkurve beschrieben werden kann.

Es liegt nahe, die Normalverteilung dann als Modell für die Verteilung einer ZV zu wählen, wenn das Histogramm der entsprechenden Beobachtungen eine glockenförmige Gestalt aufweist.

Darüber hinaus spielt die Normalverteilung als Grenzverteilung bei großem Stichprobenumfang eine wichtige Rolle.

Eine ZV $\boldsymbol{X}$ ist normalverteilt mit den Parametern $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\sigma^2}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\sigma^2} \in \mathbb{R}^+$, wenn die Dichte die Gestalt

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad x \in \mathbb{R}}$$

besitzt.

Bemerkung 7.4.6: Wir schreiben: $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ wobei μ der sogenannte **Erwartungswert**, σ die sogenannte **Standardabweichung** und σ^2 die sogenannte **Varianz** ist. Bei einer Sammlung von N Stichproben der Zufallsverteilung X

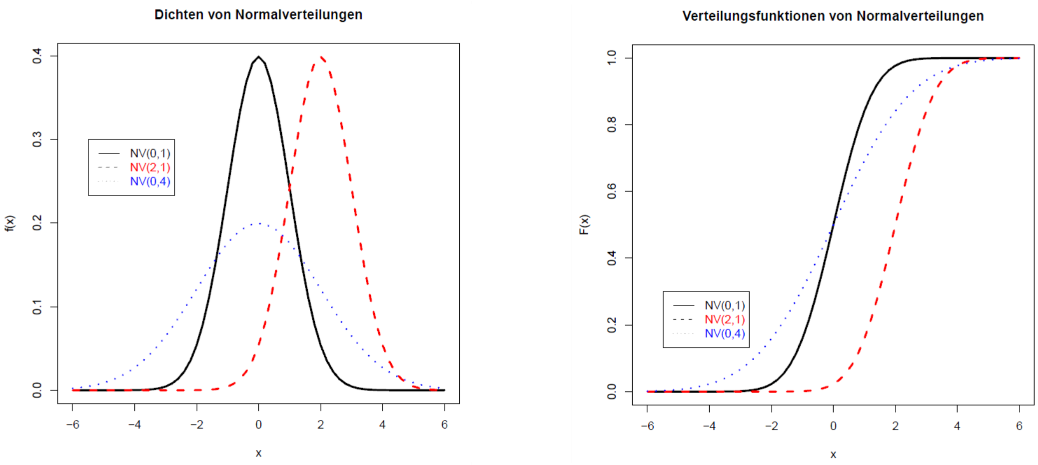

Abbildung 7.6: Dichten und Verteilungsfunktionen verschiedener NV

mit den Werten x_j lässt sich Erwartungswert, Standardabweichung und Varianz bestimmen durch

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \tag{7.4.2}$$

$$\sigma = \frac{1}{N-1}\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(x_j-\mu)^2}, \tag{7.4.3}$$

wobei die Varianz einfach das Quadrat der Standardabweichung ist.

Bemerkung 7.4.7: Die Verteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ heißt **Standardnormalverteilung**. Es gilt die Transformationsformel:

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung wird i. A. mit Φ bezeichnet.

Bemerkung 7.4.8 (Berechnung der Normalverteilung): In den meisten Tafelwerken gibt es Tabellen (siehe bspw. Abb. 7.7) zur Berechnung der Standardnormalverteilung, d.h. die Werte der Funktion Φ sind vertafelt. Wenn $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, dann berechnet man

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Die Tabelle mit den Werten der Standardnormalverteilung ist in Abb. 7.7 zu sehen.

Beispiel 7.4.9: Sei $X \sim \mathrm{N}(1,4)$, dann ist

$$P(X \leq 2) = \Phi\left(\frac{2-1}{2}\right) = \Phi(0,5) = 0.6915$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Abbildung 7.7: Werte der Standardnormalverteilung Φ

7.4.3 Gemeinsame Zufallsverteilung

Bisher haben wir eindimensionale Zufallsverteilungen (ZV) betrachtet. Eine zweidimensionale ZV (X, Y) besteht aus einem Paar von zwei eindimensionalen ZV X und Y. In vielen Fällen besteht ein Zusammenhang zwischen diesen Größen, beispielsweise, wenn X für die Körperhöhe und Y für das Gewicht einer bestimmten Grundgesamtheit von Personen steht. Um solche Zusammenhänge zu beschreiben, benötigt man den Begriff der **gemeinsamen Verteilung** von (X, Y) (*joint distribution*):

Bemerkung 7.4.10: Seien X und Y diskrete ZV mit den Werten $x_1^*, x_2^*, \ldots$ bzw. $y_1^*, y_2^*, \ldots$, dann ist die gemeinsame Verteilung von (X, Y) gegeben durch

$$P(X = x_j^*, Y = y_m^*) = p(x_j^*, y_m^*).$$

Diese Definition bedeutet: $p(x_j^*, y_m^*)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X den Wert x_j^* *und* Y den Wert y_m^* annimmt. Häufig schreibt man auch kurz $p(x_j^*, y_m^*) = p_{jm}$. Es gilt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p(x_j^*, y_m^*) = 1 \quad \text{und} \quad p(x_j^*, y_m^*) \geq 0 \quad \text{für alle } j \text{ und } m.$$

Definition 7.4.11: Die Wahrscheinlichkeiten

$$\boldsymbol{p(y_m^*) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_j^*, y_m^*)} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{p(x_j^*) = \sum_{m=1}^{\infty} p(x_j^*, y_m^*)}$$

heißen **Randwahrscheinlichkeiten** (*marginal probabilities*).

Bemerkung 7.4.12: Für die Randwahrscheinlichkeiten findet man auch die Bezeichnungen $p_{j\cdot}$ und $p_{\cdot m}$ bzw. p_{j+} und p_{+m}.

Definition 7.4.13: Die ZV X und Y sind **stochastisch unabängig**, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen bestimmten Wert annimmt nicht davon abhängt, welchen Wert Y annimmt, d.h.

$$\boldsymbol{p(x_j^*, y_m^*) = p(x_j^*) \cdot p(y_m^*)} \qquad \text{für alle } \boldsymbol{j} \text{ und } \boldsymbol{m.}$$

Seien X und Y stetige ZV mit Werten in $\mathbb{R}$, dann ist die gemeinsame Verteilung von (X, Y) gegeben durch eine Dichtefunktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+.$$

Bemerkung 7.4.14: Diese Definition bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (X, Y) einen Wert in dem Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ annimmt, ist gegeben durch

$$\boldsymbol{P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.}$$

Dieses Integral gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X einen Wert in $[a, b]$ *und* Y einen Wert in $[c, d]$ annimmt.

Da es sich um eine Dichtefunktion handelt, gilt wieder(vgl. Gl.(7.4.1)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = 1.$$

Definition 7.4.15: Die Funktionen

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad \text{und} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

heißen **Randdichten** (*marginal densities*).

Bemerkung 7.4.16: Die ZV X und Y sind **stochastisch unabhängig**, wenn für die Dichten gilt:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \text{für alle } x \text{ und } y.$$

Den Zusammenhang zwischen zwei ZV X und Y kann man durch die Kovarianz und die Korrelation beschreiben:

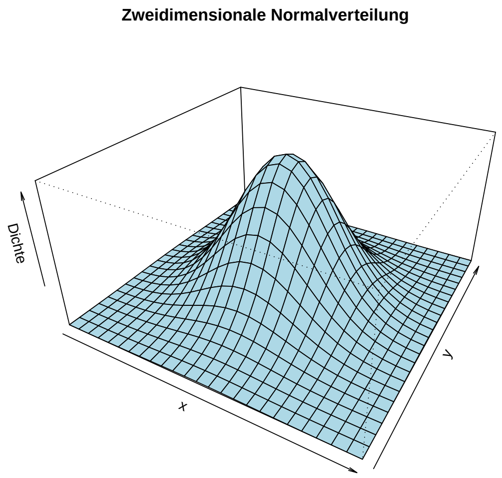

Abbildung 7.8: Dichte einer zweidimensionalen Normalverteilung

Die **Kovarianz** (*covariance*) von numerischen ZV ist definiert durch

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = \frac{1}{N-1} E[(X - E(X))(Y - E(Y))],$$

während die **Varianz** wie im eindimensionalen bestimmt wird durch

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{1}{N-1} E[(X - E(X))(X - E(X))],$$

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = \frac{1}{N-1} E[(Y - E(Y))(Y - E(Y))],$$

und die zugehörige **Kovarianzmatrix** wird gegeben durch

$$\Sigma_{XY} = \begin{pmatrix} Var(x) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Var(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Analog zur eindimensionalen Gaussfunktion können wir für die zweidimensionale Gaussverteilung schreiben:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\,|\Sigma_{XY}|} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{bmatrix} \right)^T \Sigma_{XY}^{-1} \left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{bmatrix} \right) \right\}$$

Beispiel 7.4.17: Gegeben seien zwei Datensätze mit $N = 3$ Stichproben

Messung x	0	1	2
Messung y	-1	$\frac{1}{2}$	5

Die Erwartungswerte E_x und E_y und Varianzen σ_x^2 und σ_y^2 lassen sich einfach wie im eindimensionalen bestimmen (vgl. Gl.(7.4.2) und (7.4.3)). Also $\mu_x = 1$, $\mu_y = \frac{3}{2}$, $\sigma_x^2 = 1$ und $\sigma_y^2 = \frac{39}{4}$. Jetzt lässt sich die zentrierte Datenmatrix leicht bestimmen

$$M = \begin{pmatrix} 0 - \mu_x & -1 - \mu_y \\ 1 - \mu_x & \frac{1}{2} - \mu_y \\ 2 - \mu_x & 5 - \mu_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -1 \\ 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

und die Kovarianz laesst sich einfach daraus ableiten

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} M^T \cdot M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -1 \\ 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \frac{39}{2} \end{pmatrix}$$

Jetzt lässt sich die zweidimensionale Gaussverteilung angeben als

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\,|\Sigma|} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} \right)^T \Sigma^{-1} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} \right) \right\}$$

eingesetzt mit den bestimmten Werten:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{3}{4}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & \frac{39}{4} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right) \right\}$$

Definition 7.4.18: Die **Korrelation** (Korrelationskoeffizient, *correlation*) wird durch

$$\varrho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

festgelegt.

Bemerkung 7.4.19: Gilt für X und Y $\varrho = 0$, so nennen wir sie **unkorreliert**. Wenn X und Y (stochastisch) unabhängig sind, dann gilt: $\varrho = 0$. Die Umkehrung gilt nicht!

Bemerkung 7.4.20: Die Korrelation besitzt folgende Eigenschaften:

1. $-1 \leq \varrho \leq 1$.
2. Wenn $Y = aX + b$, d.h. Y hängt linear von X ab, dann gilt

$$\varrho = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}.$$

   Das bedeutet, dass ϱ ein Maß für die **lineare Abhängigkeit** von X und Y ist.

3. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = v_{X,Y} = v_{Y,X}, \quad Cov(X,X) = VarX = v_x$.
4. Für $U = a_1X + b_1$ und $V = a_2Y + b_2$ gilt

$$Cov(U,V) = a_1a_2Cov(X,Y)$$

   und

$$\varrho_{UV} = \begin{cases} \varrho_{XY} & a_1a_2 > 0 \\ -\varrho_{XY} & a_1a_2 < 0 \end{cases}.$$

5. $Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y)$.

Hieraus ergeben sich weitere Regeln für das Rechnen mit Erwartungswerten und Varianzen:

Wenn X und Y unkorreliert sind, dann gilt

$$\begin{aligned} E(X, Y) &= E(X)E(Y) \\ Var(X + Y) &= Var(X) + Var(Y) \end{aligned}$$

Bemerkung 7.4.21: Die nichtverschwindende Korrelation zwischen zwei Zufallsvariablen hat die Konsequenz, dass wenn man eine der beiden Zufallsvariablen festhält (also statt einer stetigen Verteilung X einen Wert x_i "auswählt"), dann fällt die zweidimensionale Gaussfunktion auf eine einzelne Dimension zusammen. Man kann dies als "Schnitt" durch die 2D-Funktion $p(x, y)$ betrachten und erhalten eine Funktion $p(y)$ an der Stelle $x = x_i$, was man im Allgemeinen als

$$p(y|x = x_i)$$

aufschreibt. Lies: "Die Wahrscheinlichkeit der Verteilung Y gegeben x_i".

Beispiel 7.4.22: Wir nehmen das Ergebnis aus 7.4.17 und fragen nun danach, was passiert wenn wir den Wert $x = 3$ festhalten. Wir nehmen hier natürlich an, dass unsere Daten die ganze Wirklichkeit festhalten, was in der Natur mit drei Meßwerten nicht der Realität entspricht. Jedoch soll uns das für diesen Beispiel genügen. Unsere zweidimensionale Gaussfunktion ist nun nur noch eindimensional.

$$\begin{aligned}
p(y|x = 3) &= \frac{2}{3\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & \frac{39}{4} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right) \right\} \\
&= \frac{2}{3\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ y - \frac{3}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{39}{3} & -4 \\ -4 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ y - \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right\} \\
&= \frac{2}{3\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ y - \frac{3}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 26 - 4\left(y - \frac{3}{2}\right) \\ -8 + \frac{4}{3}\left(y - \frac{3}{2}\right) \end{bmatrix} \right\} \\
&= \frac{2}{3\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[52 - 8\left(y - \frac{3}{2}\right) - 8\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{2}{3\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[52 - 16\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir eine quadratische Form im Exponenten unserer nun eindimensionalen Funktion stehen und müssen diese wieder in die übliche Form bringen(also zweite binomische Formel). Wir substituieren zunächst $z = y - \frac{3}{2}$ um uns das Leben leichter zu machen. Dann nehmen wir eine quadratische Ergänzung vor.

$$\begin{aligned} p(y|x=3) &= \frac{2}{3\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[52 - 16z + \frac{4}{3}z^2\right]\right\} \\ &= \frac{2}{3\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}(z-6)^2 + 4\right]\right\} \end{aligned}$$

Nach dem Potenzgesetz ziehen wir die nicht zur üblichen Form der Gaussfunktion gehörenden Anteile heraus. Dann wird zurücksubstituiert.

$$\begin{aligned} p(y|x=3) &= \frac{2e^{-2}}{3\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}(z-6)^2\right]\right\} \\ &= \frac{2e^{-2}}{3\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\left(y - \frac{3}{2} - 6\right)^2\right]\right\} \\ &= \frac{2e^{-2}}{3\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\left(y - \frac{15}{2}\right)^2\right]\right\} \\ &= \frac{2e^{-2}}{3\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(y - \frac{15}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}\right]\right\} \end{aligned}$$

Jetzt können wir den neuen Erwartungswert $\mu_{y|x}$ und Varianz $v_{y|x}$ der Verteilung $p(y|x=3)$ ablesen, der zu erwarten ist, wenn $x = 3$ vorher festgelegt worden ist. Also $\mu_{y|x} = \frac{15}{2}$ und $\sigma_{y|x} = \frac{3}{4}$.

7.4.4 Die stetige Gleichverteilung

Definition 7.4.23: Eine stetige Zufallsgröße X heißt gleichverteilt auf dem Intervall $[a;b]$, falls X die folgende Dichtefunktion hat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man schreibt $X \sim \mathrm{U}([a;b])$. Ferner gilt für die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

Anhang A

Summe der natürlichen Zahlen

Wir betrachten die Summe der natürlichen Zahlen. Es gilt

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Diese Summenformel wird auch als *kleiner Satz von Gauß* bezeichnet. Wir zeigen nun, wie er darauf kam. Zunächst schrieb er die Summe zweimal auf und zwar in der Form

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n &= \sum_{i=1}^{n} i \\ n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 &= \sum_{i=1}^{n} i \end{aligned}$$

Summenbildung der beiden Gleichungen führt zu

$$\begin{aligned} &2\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{(n+1) + (n-1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n-\text{mal}} \\ &\Longrightarrow 2\sum_{i=1}^{n} i = n \cdot (n+1) \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{aligned}$$

Anhang B

Regel von L'Hospital

Mit Hilfe der Reihendarstellungen der Funktionen lassen sich Grenzwerte wie zum Beispiel

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

relativ leicht berechnen. Ein weiteres Hilfsmittel für solche Aufgaben stellt die Regel von L'Hopital dar, welche wir uns im Folgenden etwas genauer anschauen werden.

Satz B.0.24: Seien $f, g \ : \ (a; b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ für $x_0 \in (a, b)$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

so exististiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und insbesondere gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Schauen wir uns dazu einige Beispiele an.

Beispiel B.0.25:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = 1$$

Beispiel B.0.26:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} \\ &= \frac{-\cos(0)}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Satz B.0.27: Seien $f, g : (a; b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty.$$

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

so exististiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und insbesondere gilt

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel B.0.28:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

Bemerkung B.0.29: Wie wir gesehen haben ist es manchmal sinnvoll, die Regel von L´Hospital wiederholt anzuwenden. Außerdem kann die Regel durch die Transformation $x \longmapsto 1/x$ auch auf Grenzwertuntersuchungen für $x \to \infty$ übertragen werden.

Beispiel B.0.30:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Anhang C

Ableitung der Umkehrfunktion

Satz C.0.31: Sei f auf (a, b) eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion und f^{-1} die dazugehörige Umkehrfunktion. Dann gilt

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}|_{x=f^{-1}(y)}$$

Beispiel C.0.32: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = e^x$. Somit ist $x = f^{-1}(y) = \ln(y)$ und wegen $f'(x) = e^x$ ergibt sich folglich

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{e^x}|_{x=\ln(y)} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

Anhang D

Vektoräume

Bislang sind wir vorwiegend mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und insbesondere $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ in Berührung gekommen. Im Folgenden wollen wir uns die allgemeine Definition eines Vektorraums anschauen.

Definition D.0.33: Ein reeller Vektorraum ist eine Menge V mit einer Addition "$+$" und einer skalaren Multiplikation "$\cdot$", so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind

i) Für $\vec{a}, \vec{b} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\vec{a} + \vec{b} \in V$ und $\lambda \cdot \vec{a} \in V$.

ii) Es gelten die „gebräuchlichen“ Rechenregeln, d.h. das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz. Außerdem existieren ein neutrales und inverses Element bezüglich der Addition.

Die Elemente von V heißen Vektoren.

Beispiel D.0.34: Neben dem Standardbeispiel des $\mathbb{R}^n$ bilden auch die folgenden Mengen reelle Vektorräume.

a) Die Menge der komplexen Zahlen bildet einen reellen Vektorraum.

b) Die Menge der (reellen) Polynome bildet einen reellen Vektorraum. Die Vektoren sind hier also Funktionen!

c) Die Menge $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ bildet einen rellen Vektorraum.

   Im Gegensatz dazu bildet die Menge $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ keinen Vektorraum, da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in V_2 \text{ und } \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in V_2 \text{ , aber } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \notin V_2.$$

Definition D.0.35: Sei V ein reeller Vektorraum und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Dann heißt die Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *Basis* von V, falls die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig sind. Man nennt n dann die Dimension von V, geschrieben $dim(V) = n$.

Beispiel D.0.36: Im Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 ist eine Basis gegeben durch $\{1, x, x^2\}$.

Definition D.0.37: Sei V ein reeller Vektorraum , dann nennt man jede Abbildung, welche zwei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ eine reelle Zahl $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ zuordnet, Skalarprodukt, falls für alle $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt werden.

i) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ und $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = 0$

ii) $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle$

iii) $\langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ und $\langle \lambda \cdot \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \lambda \cdot \vec{v}_2 \rangle$

Ferner heißen $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ orthogonal, falls $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$ und auch die Norm von $\vec{v}$ wird analog definiert durch $||v|| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.

Beispiel D.0.38: Im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist neben dem Standardskalarprodukt beispielsweise auch ein Skalarprodukt gegeben durch $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}^t \cdot A \cdot \vec{w}$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Beispiel D.0.39: Im Vektorraum $V = C([-\pi, \pi]) = \{f \mid f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ist ein Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx.$$

In diesem Raum sind zum Beispiel die Funktionen $f(x) = 1$ und $g(x) = \sin(x)$ orthogonal, da

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(x)\, dx = \cos(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \cos(\pi) - \cos(-\pi) = -1 - (-1) = 0.$$