



UNIVERSITÄT POTSDAM
Institut für Mathematik

BACHELORARBEIT

Einige Erkenntnisse zum Ising-Modell

Verfasser

Christian Hansch

777219

Potsdam, 27. August 2018

1. Gutachter: Prof. Dr. Sylvie Roelly
2. Gutachter: Alexander Zass

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Grundlagen des Ising-Modells	3
2.1. Die Physik hinter dem Modell	3
2.2. Herleitung der Energie-Funktion und des dazugehörigen Maßes . . .	4
2.3. Die Gibbs-Verteilung auf endlichen Volumen	6
3. Thermodynamischer Limes	11
3.1. Druck im thermodynamischen Limes	13
3.2. Magnetisierung im thermodynamischen Limes	20
4. Das eindimensionale Ising-Modell	23
5. Der Gibbs-Zustand	27
5.1. Zwei Familien von lokalen Funktionen	29
5.2. Korrelationsungleichungen	31
5.3. Folgerungen aus den Korrelationsungleichungen	32
6. Phasendiagramm des Ising-Modells	39
6.1. Zwei Kriterien für (Nicht-)Eindeutigkeit	41
6.1.1. Der wahrscheinlichkeitstheoretische Ansatz für Eindeutigkeit	41
6.1.2. Zusammenführung der beiden Kriterien für Eindeutigkeit . .	45
6.2. Spontane Symmetriebrechung bei niedrigen Temperaturen	46
6.3. Spontane Symmetriebrechung bei hohen Temperaturen	51
A. Anhang	54
A.1. Sätze	54
A.2. Beweise	55

1. Einleitung

Zur Beschreibung natürlich vorkommender Vielteilchensysteme (z.B. in Festkörpern) sind häufig Modelle notwendig, weil die zu große Anzahl an Teilchen die Berechnung vieler Größen unmöglich macht. So beschäftigt sich die statistische Mechanik damit, die Problemstellung auf ein Niveau zu vereinfachen, damit man die gefundenen Lösungen auch in einer realistischen Zeit berechnen kann.

Das **Ising-Modell** ist ein solches Modell der statistischen Mechanik und wurde anfangs zur Beschreibung des Ferromagnetismus in Gitterstrukturen benutzt. Die Idee des Modells stammte ursprünglich von Ernst Isings Doktorvater Wilhelm Lenz, wirklich erforscht wurde es erst durch Ising selbst. Das Ising-Modell kann man als Spezialfall des n -Vektor-Modells auffassen, das aus einem regelmäßigem Teilchengitter der **Dimension d** besteht. Jedem Teilchen aus diesem Gitter wird ein **n -dimensionaler Spinvektor** zugewiesen. Ising betrachtete in seiner Doktorarbeit von 1924 [4] ein vereinfachtes eindimensionales Gitter und ließ auch nur zwei verschiedene Spin-Werte zu. Anschaulich gesprochen behandelte er in seiner Arbeit eine Kette von Teilchen, die jeweils einen Spin von ± 1 haben. Dabei stellte er fest, dass in diesem Spezialfall kein Phasenübergang zwischen der para- und der ferromagnetischen Phase auftritt. Das folgende Experiment erklärt, was mit einem solchen Phasenübergang gemeint ist.

Beispiel 1.1. *Wir nehmen uns einen Eisenstab, der im Grundzustand kein eigenes Magnetfeld besitzt. Diesen Stab setzen wir nun einem Magnetfeld aus. Entfernen wir dieses nach einiger Zeit wieder, stellen wir fest, dass der Eisenstab jetzt ein eigenes Magnetfeld besitzt.*

*Dieser Eisenstab zeigte nun – ohne ein extern anliegendes Magnetfeld – zwei verschiedene Zustände. Zum einen den Grundzustand **ohne** eigenes Magnetfeld und zum anderen den Endzustand **mit** eigenem Magnetfeld. Dieses Auftreten der zwei verschiedenen Zustände bei gleichen Bedingungen nennt man einen Phasenübergang.*

Das Fehlen eines Phasenübergangs beim eindimensionalen Ising-Modell führte Ising zu der Vermutung, dass in zwei- und dreidimensionalen Gittern ebenfalls keine Phasenübergänge auftreten. Im Jahre 1944 widerlegte Lars Onsager diese Behauptung, indem er den zweidimensionalen Fall ohne extern angelegtes Magnetfeld analytisch löste und einen Phasenübergang feststellte.

Jedoch kann das Ising-Modell nicht nur das ferromagnetische Verhalten auf einem Gitter beschreiben, sondern noch viele andere binäre Probleme, bei denen Knoten genau zwei Werte annehmen können. So ist zum Beispiel das Gittergas-Modell, welches die beiden Werte 0 („nicht belegt“) und 1 („belegt“) annimmt, äquivalent zum

Ising-Modell. Außerdem wird an der Konstruktion von kohärenten Ising-Maschinen geforscht, die die wahrscheinlichste Ausrichtung der Spins (realisiert durch optische Phasen) in einem Gitter experimentell ermitteln. Diese Vorgehensweise hat den großen Vorteil, dass keine Zeit für Berechnungen aufgewendet werden muss, da man die „Lösung“ einfach messen kann. Genauer kann diese Entwicklung im Artikel von Yamamoto [8] nachgelesen werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen Ausblick auf eine mögliche Herangehensweise zu bieten, die es erlaubt verallgemeinerte Aussagen über das Ising-Modell für beliebige Dimensionen d zu erhalten. Am Ende werden wir ein Phasendiagramm aufstellen, das uns hilft das Verhalten des Ising-Modells zu visualisieren. So werden wir in Kapitel 2 und 3 erst alle nötigen Definitionen und Konzepte zur Betrachtung des Ising-Modells behandeln. Die dort vorgestellten wichtigen Größen „Druck“ und „Magnetisierung“ berechne ich in Kapitel 4 beispielhaft für das eindimensionale Ising-Modell. In Kapitel 5 werden wir präzise definieren, was ein Gibbs-Zustand ist und welche interessanten Eigenschaften er besitzt. Unter anderem erfüllt ein Gibbs-Zustand einige Korrelationsungleichungen, die bei den Beweisen im letzten Kapitel „Phasendiagramm des Ising-Modells“ eine zentrale Rolle spielen werden. Die Hauptquelle dieser Arbeit ist das Buch „Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction“ von Y. Velenik und S. Friedli [3]. Viele Definitionen, Notationen und Sätze, unter anderem auch das Ziel dieser Arbeit, sind daraus entnommen worden. Eine erwähnenswerte Quelle ist auch das Buch „Exactly solved models in statistical mechanics“ von R. J. Baxter [1], worin eine verständliche und doch prägnante Einführung in das Fachgebiet der statistischen Mechanik gegeben wird. Zudem half das Skript „Mathematische Statistische Mechanik“ von Matthias Löwe [5] bei Übersetzungsproblemen weiter.

2. Grundlagen des Ising-Modells

2.1. Die Physik hinter dem Modell

In diesem Abschnitt werden wir uns mit dem physikalischen Hintergrund des Ising-Modells beschäftigen. Dies ist vorrangig zur Motivation und Orientierung gedacht und nicht zwingend notwendig zum Verständnis der theoretischen Betrachtungen in den folgenden Kapiteln.

Dazu machen wir ein kleines Gedankenexperiment: Wir stellen uns ein Gitter vor, an dessen Knotenpunkten jeweils ein Teilchen mit einem magnetischen Moment sitzt. Dieses magnetische Moment nennen wir den **Spin** eines Teilchens, den wir uns vereinfacht als einen kleinen Magneten an jedem Teilchen vorstellen können. Um die Idee des Ising-Modells aufzugreifen, nehmen wir an, dass diese Spins sich entweder bevorzugt in die gleiche Richtung wie die Spins der Nachbar-Teilchen oder einem außen angelegten Magnetfeld entsprechend orientieren. Wenn wir nun ein externes Magnetfeld anlegen, werden sich die Spins nahezu parallel in dessen Richtung ausrichten (siehe Abb. 2.1, 1). Wird jetzt die Stärke des externen Feldes verringert (siehe Abb. 2.1, 2) bis das Feld vollständig abgeklungen ist, stellen wir zwei verschiedene Verhalten fest, die in Abb. 2.1 3a und 3b dargestellt sind.

In 3a ist zu sehen (siehe Abb. 2.1), dass im ersten Fall die globale Ausrichtung der Spins verschwindet. Anders als beim zweiten Fall (siehe Abb. 2.1, 3b), denn dort bleibt ein Teil der Ausrichtung der Spins erhalten. Ersteres bezeichnen wir als **paramagnetisches** und letzteres als **ferromagnetisches** Verhalten. Das Phänomen, dass alle Spins sich gleich ausrichten, nennen wir **Magnetisierung**. Falls diese nach dem Entfernen des externen Magnetfeldes teilweise erhalten bleibt, wird sie auch **spontane Magnetisierung** genannt. Dieses Phänomen wollen wir im Laufe der Arbeit weiter untersuchen und insbesondere erklären unter welchen Voraussetzungen es auftritt. In den folgenden Abschnitten werden wir uns von der Anschauung lösen und uns die notwendigen mathematischen Grundlagen herleiten.

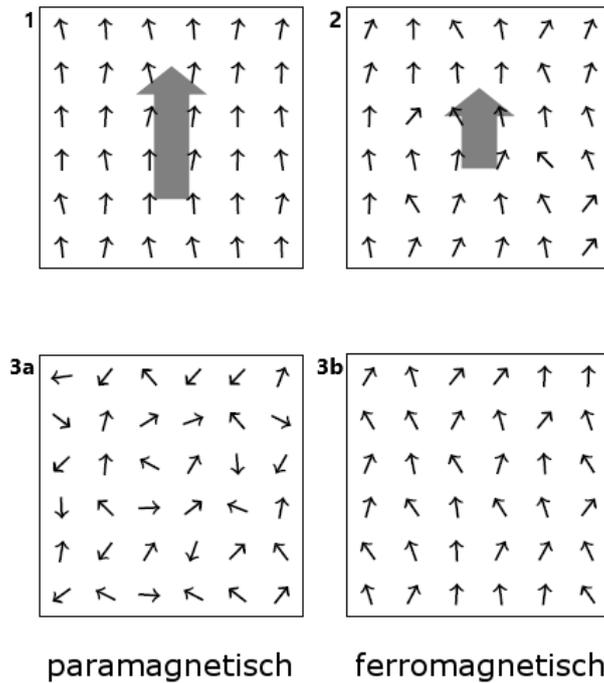


Abbildung 2.1.: Darstellung eines Gitters aus Teilchen mit magnetischem Moment und einem extern angelegten magnetischen Feld (großer Pfeil im Hintergrund), Abbildung abgewandelt aus [3, S.36]

2.2. Herleitung der Energie-Funktion und des dazugehörigen Maßes

Wir betrachten ein quadratisches, regelmäßiges Gitter. Sei das Tupel $G = (\Lambda, \mathcal{E})$ ein endlicher, ungerichteter¹ Graph und $d \in \mathbb{N}$ eine beliebige Dimension. Dabei ist Λ die Menge der Knoten (eine Teilmenge von \mathbb{Z}^d), wie zum Beispiel $\{1, \dots, n\}^d$, und \mathcal{E} die Menge der Kanten, die nur die Verbindungen zwischen den nächsten Nachbarn enthält (siehe Abb. 2.2).

Eine zusätzliche Einschränkung des Ising-Modells ist, dass es an jedem Knoten nur zwei verschiedene Zustände für Spins zulässt, entweder $+1$ oder -1 bzw. „hoch“ oder „runter“. Im Folgenden wird der Spin an dem Knoten i mit ω_i benannt, dabei ist ein Knoten $i = (i_1, \dots, i_d)$ ein Tupel aus \mathbb{Z}^d . Ein ganzes Gitter bestehend aus Knoten mit dazugehörigen Spins nennen wir eine **Konfiguration** ω , die aus dem Raum aller möglichen Konfigurationen Ω_Λ kommt.

Definition 2.1. Der Raum aller Konfigurationen in Λ wird definiert als:

$$\Omega_\Lambda = \{+1, -1\}^\Lambda. \quad (2.1)$$

¹Ein ungerichteter Graph besitzt nur Kanten, die keine Richtung aufweisen. So kann man von einem Knoten A zu einem Knoten B kommen und auch andersherum, solange diese durch eine Kante verbunden sind.

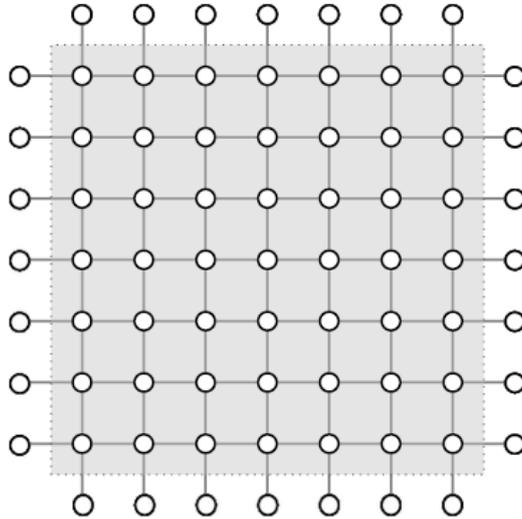


Abbildung 2.2.: Graph eines Ising-Modells von der Menge Λ (grau) und dessen Nachbarn, Abbildung abgewandelt aus [3, S.82, Fig. 3.2]

Damit wir später jeder Konfiguration eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuweisen können, leiten wir uns eine Energie-Funktion her, von der die Wahrscheinlichkeit abhängen wird. Um eine Aussage über die Energie einer Konfiguration treffen zu können, legen wir zuerst fest, welche Interaktionen zwischen den Spins einen signifikanten Einfluss auf ihre Ausrichtung nehmen.

1. Im Ising-Modell besteht nur dann eine Interaktion zwischen den Spins, wenn diese benachbart sind (siehe Abb. 2.2). Von den weiter entfernten Knoten wird der Einfachheit halber angenommen, dass sie sich nicht direkt beeinflussen.
2. Interaktionen zwischen benachbarten Spins begünstigen die Übereinstimmung dieser Spins. Eine Interaktion zwischen zwei Knoten besteht genau dann, wenn diese im Graphen durch eine Kante (siehe Abb. 2.2) verbunden sind. Wir nehmen an, sobald zwei benachbarte Knoten in ihrem Spin übereinstimmen, nimmt die Energie des Systems ab, und andersherum. Je zwei Knoten i, j und deren dazugehörigen Spins ω_i, ω_j tragen also die folgende Menge an Interaktionsenergie bei:

$$-\omega_i \omega_j$$

3. Zusätzlich kann auch noch ein externes magnetisches Feld auf das System einwirken, sodass Spins dazu geneigt sind, ihre Spin-Richtung dem externen Magnetfeld anzupassen. $h \in \mathbb{R}$ bezeichne die Stärke des Magnetfeldes und die Interaktion des Feldes mit den Spin an dem Knoten i beträgt:

$$-h\omega_i$$

Damit ergibt sich die Energie des Systems durch die Summe der Interaktionen zwischen zwei benachbarten Spins (vgl. 2.) und der Interaktion vom externen Magnetfeld mit jedem einzelnen Spin (vgl. 3.). Die (Hamilton-)Funktion für die **Energie** sieht deswegen folgendermaßen aus:

$$\mathcal{H}_{\Lambda,h}(\omega) = - \sum_{\substack{i,j \in \Lambda \\ i \sim j}} \omega_i \omega_j - h \sum_{i \in \Lambda} \omega_i \quad (2.2)$$

dabei sind i und j durch eine Kante verbunden bzw. benachbart, wenn wir $i \sim j$ schreiben. Außerdem sei das dazugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß (auch **Gibbs-Maß** genannt), das jeder Konfiguration eine Wahrscheinlichkeit zuweist, gegeben durch

$$\mu_{\Lambda,\beta,h}(\omega) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda,h}(\omega)}}{\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,h}}, \quad (2.3)$$

wobei $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die inverse Temperatur und $\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,h} = \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda,h}(\omega)}$ die dazugehörige Zustandssumme² angibt.

Wir können beobachten, dass je kleiner die Energie eines Zustands ist, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieses bestimmten Zustands und umgekehrt.

Bemerkung 2.2. *Eine weitere wichtige Beobachtung ist, dass die Energie-Funktion \mathcal{H} für $h = 0$ invariant unter einem globalen Spin-Flip (bzw. dem Umdrehen der Orientierung jedes Spins in ω) ist:*

$$\mathcal{H}_{\Lambda,0}(-\omega) = - \sum_{\substack{i,j \in \Lambda \\ i \sim j}} (-\omega)_i (-\omega)_j = - \sum_{\substack{i,j \in \Lambda \\ i \sim j}} \omega_i \omega_j = \mathcal{H}_{\Lambda,0}(\omega)$$

Daraus folgt die gleiche Symmetrie-Eigenschaft für das Gibbs-Maß:

$$\mu_{\Lambda,\beta,h}(\omega) = \mu_{\Lambda,\beta,h}(-\omega)$$

2.3. Die Gibbs-Verteilung auf endlichen Volumen

In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe des Gibbs-Maßes die zugehörige Gibbs-Verteilung definieren. Bevor wir uns dieser Definition widmen können, müssen wir die Eigenschaft zweier Knoten, benachbart zu sein, definieren:

$$i \sim j \stackrel{\text{def}}{\iff} \|j - i\|_1 = 1,$$

²Die Zustandssumme ist eine reelle Zahl und sichert die Normiertheit des Wahrscheinlichkeitsmaßes.

dabei ist die 1-Norm definiert durch $\|x\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^d |x_k|$, außerdem gilt $i, j \in \Lambda$ und ab sofort bezeichnen wir die Knoten i und j als benachbart, wenn wir $i \sim j$ schreiben. Außerdem werden wir noch verschiedene Randbedingungen einführen. Wie es der Name schon vermuten lässt, werden bei den Randbedingungen jene Spins betrachtet, die sich am Rand bzw. außerhalb unserer endlichen Menge Λ , auch **Volumen** genannt, befinden. Jedoch ist es wichtig, diese Randbedingungen zu unterscheiden, da sie trotzdem mit den Spins in Λ interagieren und somit die Wahrscheinlichkeit der Konfiguration verändern. Man unterscheidet im Allgemeinen drei verschiedene Arten von Randbedingungen: freie, periodische oder feste Randbedingungen.

Um die drei Arten unterscheiden zu können, wird ein oberer Index entsprechend der jeweiligen Randbedingung gewählt; \emptyset für **freie**, per für **periodische** und η für **feste Randbedingungen**, wobei η für die Konfiguration der umgebenden Spins steht. Falls stattdessen ein $\#$ eingesetzt wurde, ist eine **beliebige** Randbedingung gemeint.

Außerdem bezeichnet der Ausdruck $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ eine beliebige endliche Teilmenge Λ aus \mathbb{Z}^d .

Endliche Volumen mit freier Randbedingung.

Die Konfigurationen des Ising-Modells auf einem Volumen $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ mit freier Randbedingung sind Elemente der Menge

$$\Omega_\Lambda^\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_\Lambda = \{+1, -1\}^\Lambda.$$

Folglich besitzt eine Konfiguration $\omega \in \Omega_\Lambda$ die Form $\omega = (\omega_i)_{i \in \Lambda}$. Die grundlegende Zufallsvariable ist der **Spin** an einem Knoten $i \in \Lambda$, der definiert ist als $\sigma_i : \Omega_\Lambda \rightarrow \{+1, -1\}$ mit $\sigma_i(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i$.

Bemerkung 2.3. *Die Zufallsvariable σ_i wird in den ersten Kapiteln oft nicht ausgeschrieben, da sie implizit in der Definition des Spins ω_i enthalten ist. Erst in Kapitel 5 und 6 werden wir wieder vermehrt auf die Zufallsvariable σ_i zurückgreifen.*

In den nächsten Definitionen werden wir die Menge aller Kanten zwischen je zwei benachbarten Knoten in Λ brauchen. Diese bezeichnen wir als **Kantenmenge** und definieren diese mit

$$\mathcal{E}_\Lambda^\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \{\{i, j\} \subset \Lambda : i \sim j\}.$$

Die Funktion $\mathcal{H}_{\Lambda, h}^\emptyset(\omega)$ weist jeder Konfiguration $\omega \in \Omega_\Lambda$ eine bestimmte **Energie** zu. Diese ist definiert als

$$\mathcal{H}_{\Lambda, h}^\emptyset(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^\emptyset} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega),$$

³Das „def“ über einem Äquivalenzpfeil oder einem Gleichheitszeichen, definiert diese Größe erstmalig.

wobei $h \in \mathbb{R}$ die Stärke des externen Magnetfeldes bezeichnet. Wenn wir von der freien Randbedingung ausgehen, so wird angenommen, dass die Spins innerhalb von Λ nicht mit den äußeren interagieren, also in dem Sinne frei sind.

Definition 2.4. Die Gibbs-Verteilung des Ising-Modells auf Λ mit **freier Randbedingung** ist eine Verteilung auf Ω_Λ mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{\Lambda,\beta,h}^\emptyset(\omega) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda,h}^\emptyset(\omega)}}{\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,h}},$$

wobei $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die inverse Temperatur und $h \in \mathbb{R}$ die Stärke des externen Magnetfeldes angibt. Dabei ist

$$\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,h}^\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda,h}^\emptyset(\omega)}$$

die Zustandssumme in Λ bei einer freien Randbedingung, die für die Normierung⁴ des Maßes sorgt. Die Zustandssumme besitzt die gleiche Eigenschaft auch für die übrigen Randbedingungen.

Endliche Volumen mit periodischer Randbedingung.

Wie bei der freien Randbedingung sind die Konfigurationen des Ising-Modells mit periodischer Randbedingung Elemente der Menge

$$\Omega_{\Lambda_N}^{\text{per}} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{\Lambda_N} = \{+1, -1\}^{\Lambda_N},$$

dabei ist $\mathbb{Z}^d \ni \Lambda_N \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, N-1\}^d$ der Torus mit Periodizität N . Wenn wir eine periodische Randbedingung annehmen, so ist gemeint, dass die Spins, wie auf einem Torus, über alle Ränder hinweg miteinander interagieren. Eine Konfiguration $\omega \in \Omega_{\Lambda_N}$ besitzt die Form $\omega = (\omega_i)_{i \in \Lambda_N}$.

Die Kantenmenge der periodischen Randbedingung ist definiert durch

$$\mathcal{E}_{\Lambda_N}^{\text{per}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_{\Lambda_N}^\emptyset \cup \{\{i, j\} \subset \Lambda_N \mid \exists! k \in \{1, \dots, d\} : (i_k - j_k \equiv \pm 1 \pmod{N}) \wedge (\forall l \neq k : i_l = j_l)\}$$

Die Funktion $\mathcal{H}_{\Lambda,h}^{\text{per}}(\omega)$ weist jeder Konfiguration $\omega \in \Omega_{\Lambda_N}$ eine bestimmte Energie zu. Mit dem Parameter h ist diese definiert als

$$\mathcal{H}_{\Lambda,h}^{\text{per}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^{\text{per}}} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega),$$

⁴Es gilt also $\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\emptyset} \mu_{\Lambda,\beta,h}^\emptyset(\omega) = 1$.

Definition 2.5. Die Gibbs-Verteilung des Ising-Modells auf Λ mit **periodischer Randbedingung** und den Parametern β und h ist eine Verteilung auf Ω_{Λ_N} mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{\Lambda,\beta,h}^{\text{per}}(\omega) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda,h}^{\text{per}}(\omega)}}{\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,h}}.$$

Dabei bezeichnet

$$\mathbf{Z}_{\Lambda_N,\beta,h}^{\text{per}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda_N}} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda,h}^{\#}(\omega)}$$

die Zustandssumme in Λ_N bei einer periodischen Randbedingung.

Endliche Volumen mit fester Randbedingung.

Bei dem Ising-Modell mit fester Randbedingung verfolgen wir einen etwas anderen Ansatz. Wir betrachten die Konfigurationen auf ganz $\Omega_{\mathbb{Z}^d} = \{+1, -1\}^{\mathbb{Z}^d}$ (oder kurz Ω). Wenn wir die feste Randbedingung verwenden, interagieren die Spins innerhalb von Λ mit den fixierten Spins außerhalb von Λ . Somit sind die Konfigurationen des Ising-Modells, mit einem Volumen $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ und einer festen Randbedingung η , Elemente der Menge

$$\Omega_{\Lambda}^{\eta} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \eta_i, \forall i \notin \Lambda\}.$$

η ist hierbei eine Konfiguration aus Ω , jedoch ist Ω_{Λ}^{η} nur von den Spins von η außerhalb von Λ abhängig.

Weiterhin sei die Kantenmenge der festen Randbedingung definiert durch

$$\mathcal{E}_{\Lambda}^{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_{\Lambda}^{\emptyset} \cup \{\{i, j\} \mid i \in \Lambda, j \notin \Lambda : i \sim j\}.$$

Bemerkung 2.6. Die Kantenmenge $\mathcal{E}_{\Lambda}^{\text{f}}$ hat nicht den oberen Index η , weil diese nicht von der Konfiguration η abhängt, dennoch wollen wir die Kantenmenge mit festen Randbedingungen von den anderen unterscheiden und übernehmen die Schreibweise mit ^f als Symbol für eine feste Randbedingung.

Die Funktion $\mathcal{H}_{\Lambda,h}^{\eta}(\omega)$ weist jeder Konfiguration $\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\eta}$ eine bestimmte **Energie** zu. Mit dem Parameter h ist diese definiert als

$$\mathcal{H}_{\Lambda,h}^{\eta}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}^{\eta}} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega).$$

Wenn wir eine feste Randbedingung annehmen, so existieren Spins außerhalb von Λ , die mit den Spins innerhalb von Λ interagieren.

Definition 2.7. Die Gibbs-Verteilung des Ising-Modells auf Λ mit **fester Randbedingung** und den Parametern β und h ist eine Verteilung auf Ω_{Λ_N} mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{\Lambda,\beta,h}^{\eta}(\omega) = \frac{e^{-\beta\mathcal{H}_{\Lambda,h}^{\eta}(\omega)}}{\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,h}}.$$

Dabei ist

$$\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,h}^{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\eta}} e^{-\beta\mathcal{H}_{\Lambda,h}^{\eta}(\omega)}$$

die Zustandssumme in Λ bei einer festen Randbedingung.

Bemerkung 2.8. Bei der festen Randbedingung gilt für das Gibbs-Maß eine ähnliche Symmetrie wie in Bemerkung 2.2. Nur mit dem Unterschied, dass wir auch die äußere Konfiguration umkehren müssen, so folgt beispielsweise:

$$\mu_{\Lambda,\beta,0}^{+}(\omega) = \mu_{\Lambda,\beta,0}^{-}(-\omega)$$

Wir führen hier noch einige grundlegende Funktionen und Notationen ein.

Definition 2.9. Es sei f eine beliebige Funktion. Der Erwartungswert einer solchen Funktion bezüglich des Gibbs-Maßes $\mu_{\Lambda,\beta,h}^{\#}$ ist definiert durch

$$\langle f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{\#} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} f(\omega) \mu_{\Lambda,\beta,h}^{\#}(\omega). \quad (2.4)$$

Eine weitere wesentliche Größe ist die Zufallsvariable der **Magnetisierungsdichte**

$$m_{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i. \quad (2.5)$$

Diese nimmt nur Werte zwischen -1 und 1 an. Für die Extremfälle $m_{\Lambda} = -1$ bzw. $m_{\Lambda} = 1$ müssen alle Spins in die gleiche Richtung zeigen. Solche Konfigurationen deren Magnetisierungsdichte betragsmäßig in der Nähe der 1 liegen werden *geordnet* genannt. Weiterhin wird die Magnetisierungsdichte gleich 0, wenn die Anzahl der Spins, die den Wert 1 annehmen, gleich der Anzahl der Spins ist, die den Wert -1 annehmen. Konfigurationen mit einer Magnetisierungsdichte nahe bei 0 werden *ungeordnet* genannt.

Außerdem führen wir, mit Hilfe des Erwartungswerts, die folgende Größe ein:

$$m_{\Lambda}^{\#}(\beta, h) \stackrel{\text{def}}{=} \langle m_{\Lambda} \rangle_{\Lambda,\beta,h}^{\#} \quad (2.6)$$

Zu guter Letzt definieren wir die Funktion des Drucks.

Definition 2.10. Der **Druck** in $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$, mit einer beliebigen Randbedingung und den Parametern β und h , ist definiert durch

$$\psi_{\Lambda}^{\#}(\beta, h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,h}^{\#} \right). \quad (2.7)$$

3. Thermodynamischer Limes

In der Stochastik gibt es Sätze wie das Gesetz der großen Zahlen, dessen Abschätzung mit größer werdender Stichprobenzahl immer genauer wird. Diesen Ansatz können wir uns hier zu Nutze machen, denn wenn wir von der Gibbs-Verteilung des Ising-Modells den Limes bilden, ist das ähnlich zu der immer größer werdenden Stichprobenzahl des obigen Beispiels. Da unser Modell ein thermodynamisches System beschreibt, bezeichnen wir den Grenzwert als thermodynamischen Limes. Wie Syter schon in seinem Paper [7] feststellte, ist jener Limes aus der statistischen Mechanik nicht wegzudenken, da nur mit dessen Hilfe ein Phasenübergang beschrieben werden kann.

In dieser Arbeit wird das Ising-Modell auch auf ein unendliches Volumen verallgemeinert. Um dies zu erreichen, wollen wir zunächst die Konvergenz der Mengen Λ_n gegen \mathbb{Z}^d betrachten. Dabei schreiben wir $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ für eine Folge von endlichen Mengen $\Lambda_n \Subset \mathbb{Z}^d$, die gegen \mathbb{Z}^d konvergiert.

Definition 3.1. Eine Folge von Mengen $\Lambda_n \Subset \mathbb{Z}^d$ konvergiert genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Λ_n ist aufsteigend: $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$,
2. Λ_n füllt \mathbb{Z}^d aus: $\bigcup_{n \geq 1} \Lambda_n = \mathbb{Z}^d$.

Eigentlich würde das für einen thermodynamischen Limes reichen, jedoch soll dieser Limes im besten Fall unabhängig von der Randbedingung sein. Um deren Einfluss auf die Menge Λ zu überprüfen, brauchen wir noch eine zusätzliche Bedingung. Dazu definieren wir die sogenannte **Van Hove-Konvergenz** von Mengen.

Definition 3.2. Eine Folge von Mengen $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ konvergiert im Sinne von **Van Hove** genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial^{\text{in}} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0 \quad (3.1)$$

gilt, wobei $\partial^{\text{in}} \Lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \Lambda_n \mid \exists j \notin \Lambda_n : j \sim i\}$ den inneren Rand der Menge Λ_n bezeichnet. Für eine Folge von Mengen Λ_n , die nach Van Hove gegen \mathbb{Z}^d konvergieren, schreiben wir $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$.

Beispiel 3.3. Eine der einfachsten Folgen von Mengen, die diese Art von Konvergenz erfüllt, ist die Folge

$$B(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{-n, \dots, n\}^d. \quad (3.2)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $B(n)$ gegen \mathbb{Z}^d konvergiert. Dazu schreiben wir $B(n+1)$ um:

$$\begin{aligned} B(n+1) &= \{-(n+1), -n, \dots, n, n+1\}^d \\ &= \{-n, \dots, n\}^d \dot{\cup} \{i \in B(n+1) \mid \exists k \in \{1, \dots, d\} : |i_k| = n+1\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $B(n) \subset B(n+1)$.

Für die Konvergenz bleibt zu zeigen, dass \mathbb{Z}^d von den $B(n)$ ausgefüllt wird. Zuerst zeigen wir:

$$\bigcup_{n \geq 1} B(n) \subset \mathbb{Z}^d.$$

Es gilt $\{-n, \dots, n\}^d \subset \mathbb{Z}^d$, da $\{-n, \dots, n\} \subset \mathbb{Z}$ ebenfalls gilt.

Daraus folgt, dass jedes $B(n)$ eine Teilmenge von \mathbb{Z}^d ist und somit ist auch $\bigcup_{n \geq 1} B(n)$ eine Teilmenge von \mathbb{Z}^d .

Wir zeigen nun

$$\bigcup_{n \geq 1} B(n) \supset \mathbb{Z}^d.$$

Sei $i \in \mathbb{Z}^d$ beliebig. Sei i_{\max} der betragsmäßig größte Eintrag in i . Es folgt, dass $i \in B(i_{\max})$ gilt. Somit haben wir für ein beliebiges i ein $B(n)$ gefunden, sodass i darin enthalten ist. Damit wurde gezeigt, dass die Folge $B(n)$ gegen \mathbb{Z}^d konvergiert. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Folge auch im Sinne von Van Hove konvergiert, das heißt, wir müssen zeigen, dass die Gleichung (3.1) gilt.

Wir berechnen zunächst $|B(n)| = (2n+1)^d$ und

$$\begin{aligned} |\partial^{\text{in}} B(n)| &= |B(n) \setminus B(n-1)| = (2n+1)^d - (2n-1)^d \\ &= (2n+1 - (2n-1)) \sum_{i=0}^{d-1} (2n+1)^i (2n-1)^{d-1-i} \\ &= 2 \sum_{i=0}^{d-1} (2n+1)^i (2n-1)^{d-1-i} \binom{d-1}{i} \leq 2(4n)^{d-1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wir benutzen nun die Abschätzung (3.3) und $\frac{1}{(2n+1)^d} \leq \frac{1}{(2n)^d}$, um die Van Hove-Konvergenz nachzuweisen:

$$\frac{|\partial^{\text{in}} B(n)|}{|B(n)|} = \frac{|\partial^{\text{in}} B(n)|}{(2n+1)^d} \leq \frac{2(4n)^{d-1}}{(2n)^d} = \frac{2^{d-1}}{n} \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0.$$

□

3.1. Druck im thermodynamischen Limes

In diesem Kapitel wollen wir uns genauer mit den Eigenschaften des Drucks beschäftigen. Wir werden zeigen, dass diese beiden Größen im thermodynamischen Limes einen eindeutigen Grenzwert besitzen und sogar unabhängig von der vorherrschenden Randbedingung sind.

Lemma 3.4. Die Energie-Funktion $\mathcal{H}_{\Lambda,h}^\#(\omega)$ ist **affin** bezüglich h .

Beweis. Wir benutzen die Definition von $\mathcal{H}_{\Lambda,h}^\#(\omega)$ und schreiben:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\Lambda,\alpha h_1+(1-\alpha)h_2}^\#(\omega) &= - \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^\#} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - (\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2) \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega) \\
 &= -\alpha \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^\#} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - \alpha h_1 \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega) \\
 &\quad - (1-\alpha) \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^\#} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - (1-\alpha) h_2 \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega) \\
 &= \alpha \left(- \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^\#} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - h_1 \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega) \right) \\
 &\quad + (1-\alpha) \left(- \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^\#} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - h_2 \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega) \right) \\
 &= \alpha \mathcal{H}_{\Lambda,h_1}^\#(\omega) + (1-\alpha) \mathcal{H}_{\Lambda,h_2}^\#(\omega)
 \end{aligned}$$

□

Lemma 3.5. Der Druck $\psi_\Lambda^\#(\beta, h)$ ist **konvex** in h .

Beweis. Um zu beweisen, dass $\psi_\Lambda^\#(\beta, h)$ in h konvex ist, betrachten wir:

$$\begin{aligned}
 \psi_\Lambda^\#(\beta, \alpha h_1 + (1-\alpha)h_2) &= \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,\alpha h_1+(1-\alpha)h_2}^\# \right) \\
 &= \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\#} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda,\alpha h_1+(1-\alpha)h_2}^\#(\omega)} \right).
 \end{aligned}$$

Wir benutzen zuerst die Affinität von $\mathcal{H}_{\Lambda,h}^\#(\omega)$ in h (siehe Lemma 3.4) und schätzen durch die höldersche Ungleichung (siehe Lemma A.2) ab:

$$\begin{aligned}
\psi_{\Lambda}^{\#}(\beta, \alpha h_1 + (1 - \alpha) h_2) &= \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} e^{-\alpha \beta \mathcal{H}_{\Lambda, h_1}^{\#}(\omega) - (1 - \alpha) \beta \mathcal{H}_{\Lambda, h_2}^{\#}(\omega)} \right) \\
&= \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} \left(e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h_1}^{\#}(\omega)} \right)^{\alpha} \left(e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h_2}^{\#}(\omega)} \right)^{1 - \alpha} \right) \\
&\leq \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\left(\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h_1}^{\#}(\omega)} \right)^{\alpha} \left(\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\#}} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h_2}^{\#}(\omega)} \right)^{1 - \alpha} \right) \\
&= \frac{1}{|\Lambda|} \alpha \ln \left(\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h_1}^{\#} \right) + \frac{1}{|\Lambda|} (1 - \alpha) \ln \left(\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h_2}^{\#} \right) \\
&= \alpha \psi_{\Lambda}^{\#}(\beta, h_1) + (1 - \alpha) \psi_{\Lambda}^{\#}(\beta, h_2).
\end{aligned}$$

□

Satz 3.6. *Der Druck in thermodynamischen Limes*

$$\psi(\beta, h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \psi_{\Lambda, \beta, h}^{\#}$$

ist wohldefiniert und sowohl von der Folge $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ als auch von der Art der Randbedingung unabhängig. Zusätzlich ist ψ konvex (als Funktion auf $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$) und gerade bezüglich h .

Der Beweis zur Existenz des Grenzwertes wurde aus dem Buch von Velenik [3, Thm. 3.6] übernommen.

Beweis. (Existenz des Grenzwertes)

Der Beweis besteht aus 2 Schritten. Zuerst werden wir die Existenz eines vereinfachten Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{D_n}^{\emptyset}(\beta, h)$$

beweisen, indem wir zeigen, dass $\psi_{D_n}^{\emptyset}$ eine Cauchy-Folge ist, wobei $D_n = \{1, 2, 3, \dots, 2^n\}^d$ ist. Im zweiten Schritt verallgemeinern wir diesen Beweis auf jede Folge $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$. Außerdem werden wir in diesem Beweis (β, h) bei der Notation weglassen, weil diese fest gewählt sind. Die Energie bezüglich des Würfels D_{n+1} kann alternativ auch durch die Energie in 2^d kleineren Würfeln mit halber Kantenlänge $D_n^{(1)}, \dots, D_n^{(2^d)}$ beschrieben werden. Die Energie kann somit umgeschrieben werden zu

$$\mathcal{H}_{D_{n+1}}^{\emptyset} = \sum_{i=1}^{2^d} \mathcal{H}_{D_n^{(i)}}^{\emptyset} + R_n, \quad (3.4)$$

dabei bezeichnet R_n die Energie der Spins zwischen den kleineren Würfeln. Man kann sich überlegen, dass jede Fläche des Würfels D_{n+1} aus $(2^{n+1})^{d-1}$ Knoten besteht. Insgesamt enthält R_n die Energie von $d \cdot (2^{n+1})^{d-1}$ Interaktionen zwischen Spins. Daraus können wir die folgende Abschätzung herleiten:

$$|R_n| \leq \beta d 2^{(d-1)(n+1)}$$

Eingesetzt in (3.4), erhalten wir $\mathcal{H}_{D_{n+1}}^\varnothing \geq -\beta d 2^{(d-1)(n+1)} + \sum_{i=1}^{2^d} \mathcal{H}_{D_n^{(i)}}^\varnothing$ und folgern daraus eine Abschätzung für die Zustandssumme

$$\mathbf{Z}_{D_{n+1}}^\varnothing \leq e^{\beta d 2^{(d-1)(n+1)}} \sum_{\omega \in \Omega_{D_{n+1}}} \prod_{i=1}^{2^d} \exp \left[-\mathcal{H}_{D_n^{(i)}}^\varnothing(\omega) \right].$$

Wir teilen die Summe über $\omega \in \Omega_{D_{n+1}}$ in 2^d einzelne Summen über $\omega^{(i)} \in \Omega_{D_n}^{(i)}$ auf, sodass wir

$$\sum_{\omega \in \Omega_{D_{n+1}}} \prod_{i=1}^{2^d} \exp \left[-\mathcal{H}_{D_n^{(i)}}^\varnothing(\omega) \right] = \prod_{i=1}^{2^d} \sum_{\omega \in \Omega_{D_{n+1}}} \exp \left[-\mathcal{H}_{D_n^{(i)}}^\varnothing(\omega^{(i)}) \right] = \left(\mathbf{Z}_{D_n}^\varnothing \right)^{2^d}$$

erhalten, wobei wir für die letzte Umformung ausgenutzt haben, dass $\mathbf{Z}_{D_n^{(i)}}^\varnothing = \mathbf{Z}_{D_n}^\varnothing$ ist. Analog dazu kann eine untere Grenze gefunden werden und wir haben das Ergebnis:

$$e^{-\beta d 2^{(d-1)(n+1)}} \left(\mathbf{Z}_{D_n}^\varnothing \right)^{2^d} \leq \mathbf{Z}_{D_{n+1}}^\varnothing \leq e^{\beta d 2^{(d-1)(n+1)}} \left(\mathbf{Z}_{D_n}^\varnothing \right)^{2^d}.$$

Wenden wir den Logarithmus an und teilen durch $|D_{n+1}| = 2^{d(n+1)}$, so erhalten wir

$$-\beta d 2^{-(n+1)} + \frac{1}{2^{dn}} \ln \left(\mathbf{Z}_{D_n}^\varnothing \right) \leq \psi_{D_{n+1}}^\varnothing \leq \beta d 2^{-(n+1)} + \frac{1}{2^{dn}} \ln \left(\mathbf{Z}_{D_n}^\varnothing \right).$$

Wir benutzen $|D_n| = 2^{dn}$ bzw. $\psi_{D_n}^\varnothing = \frac{1}{2^{dn}} \ln \left(\mathbf{Z}_{D_n}^\varnothing \right)$ und folgern

$$\left| \psi_{D_{n+1}}^\varnothing - \psi_{D_n}^\varnothing \right| \leq \beta d 2^{-(n+1)}.$$

Für ein ausreichend großes n erkennen wir, dass $\psi_{D_n}^\varnothing$ eine Cauchy-Folge ist, so gilt für alle $n \leq m$:

$$\left| \psi_{D_m}^\varnothing - \psi_{D_n}^\varnothing \right| \leq \beta d \sum_{k=n+1}^m 2^{-k} = \beta d (2^{-n} - 2^{-m}).$$

Das impliziert, dass der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{D_n}^\varnothing$ existiert und wir bezeichnen diesen von nun an mit ψ .

Nun kommen wir zum zweiten Teils des Beweises, nämlich den Grenzwert auf beliebige Folgen auszuweiten.

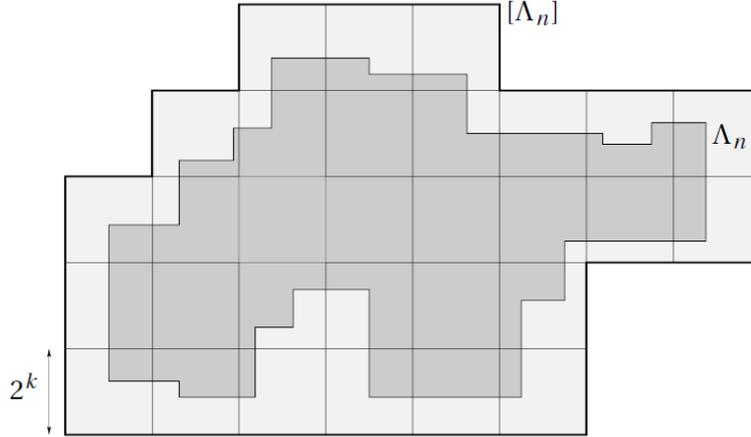


Abbildung 3.1.: Überdeckung der Menge Λ_n aus den Würfeln $D_k^{(j)}$, Abbildung aus [3, S.86]

Sei $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ also eine beliebige Folge. Wir wählen außerdem ein festes k und betrachten eine Partition von \mathbb{Z}^d bestehend aus regelmäßig angeordneten und disjunkten Mengen D_k . Deswegen können wir für jedes n eine minimale Überdeckung der Λ_n aus den Elementen $D_k^{(j)}$ der Partition finden, und es gelte $[\Lambda_n] \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_j D_k^{(j)}$.

Wir nutzen die Abschätzung

$$|\psi_{\Lambda_n} - \psi| \leq |\psi_{\Lambda_n}^\emptyset - \psi_{[\Lambda_n]}^\emptyset| + |\psi_{[\Lambda_n]}^\emptyset - \psi_{D_k}^\emptyset| + |\psi_{D_k}^\emptyset - \psi|. \quad (3.5)$$

Zunächst sei $\varepsilon > 0$. Im ersten Teil dieses Beweises haben wir gezeigt, dass $\psi_{D_k}^\emptyset \rightarrow \psi$ für $k \rightarrow \infty$ gilt, so existiert ein k_0 abhängig von β, h und ε , sodass $|\psi_{D_k}^\emptyset - \psi| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $k \geq k_0$.

Wir berechnen nun $\psi_{[\Lambda_n]}^\emptyset$, indem wir

$$\mathcal{H}_{[\Lambda_n]}^\emptyset = \sum_j \mathcal{H}_{D_k^{(j)}}^\emptyset + W_n$$

schreiben, wobei W_n die Energie aller Interaktionen zwischen den $D_k^{(j)}$ bezeichnet. Dieses W_n wollen wir durch eine kleine Überlegung abschätzen. Jeder Würfel $D_k^{(j)}$ besitzt maximal an $2d$ Seiten des Würfels Interaktionen zu anderen Würfeln. Jede Seite von $D_k^{(j)}$ besteht aus $(2^k)^{d-1}$ Knoten und besitzt somit auch $(2^k)^{d-1}$ Interaktionen nach außen. Dadurch erhalten wir folgende Abschätzung:

$$|W_n| \leq \beta \frac{|[\Lambda_n]|}{|D_k|} 2d (2^k)^{d-1} = \beta d 2^{-k+1} |[\Lambda_n]|. \quad (3.6)$$

Hierbei müssen wir beachten, dass $\frac{|[\Lambda_n]|}{|D_k|}$ die Anzahl der Würfel $D_k^{(j)}$ bezeichnet, die benötigt werden um Λ_n zu überdecken. Mit den gleichen Schritten wie bei R_n im

ersten Teil des Beweises folgt, dass ein k_1 abhängig von β und ε existiert, sodass

$$\left| \psi_{[\Lambda_n]}^\varnothing - \psi_{D_k}^\varnothing \right| \leq \beta d 2^{-k+1} < \frac{\varepsilon}{3}$$

erfüllt ist für alle $k \geq k_1$. Damit beide $\frac{\varepsilon}{3}$ -Abschätzungen erfüllt sind, sei $k \geq \max\{k_0, k_1\}$. Von nun an sei $\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} [\Lambda_n] \setminus \Lambda_n$. Jeder Knoten besitzt $2d$ Kanten zu Nachbarn und für die Abschätzung habe jede Kante den maximalen Wert 1. So erkennen wir, dass

$$\left| \mathcal{H}_{\Lambda_n}^\varnothing - \mathcal{H}_{[\Lambda_n]}^\varnothing \right| \leq (2d\beta + |h|) |\Delta_n| \quad (3.7)$$

erfüllt ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{[\Lambda_n]}^\varnothing &= \sum_{\omega \in \Omega_{[\Lambda_n]}} e^{-\mathcal{H}_{[\Lambda_n]}^\varnothing(\omega)} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_{[\Lambda_n]}} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^\varnothing(\omega|_{\Lambda_n})} e^{\mathcal{H}_{\Lambda_n}^\varnothing(\omega|_{\Lambda_n}) - \mathcal{H}_{[\Lambda_n]}^\varnothing(\omega)} \\ &\leq \sum_{\omega \in \Omega_{[\Lambda_n]}} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^\varnothing(\omega|_{\Lambda_n})} e^{(2d\beta + |h|) |\Delta_n|} \quad , \end{aligned}$$

dabei bezeichnet $\omega|_{\Lambda_n}$ die Konfiguration der Knoten, die innerhalb von Λ_n liegen. Wir müssen hierbei beachten, dass die Summanden nicht mehr von den Spins der Konfiguration ω außerhalb von Λ_n abhängen und sich somit der Faktor $2^{|\Delta_n|}$ ergibt, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega_{[\Lambda_n]}} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^\varnothing(\omega|_{\Lambda_n})} e^{(2d\beta + |h|) |\Delta_n|} &= 2^{|\Delta_n|} \cdot e^{(2d\beta + |h|) |\Delta_n|} \sum_{\omega \in \Omega_{[\Lambda_n]}} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n}^\varnothing(\omega|_{\Lambda_n})} \\ &= e^{(2d\beta + |h|) |\Delta_n|} \cdot \mathbf{Z}_{\Lambda_n}^\varnothing . \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\mathbf{Z}_{[\Lambda_n]}^\varnothing \leq \mathbf{Z}_{\Lambda_n}^\varnothing e^{(2d\beta + |h| + \ln 2) |\Delta_n|} .$$

Analog dazu können wir ebenso eine untere Grenze für $\mathbf{Z}_{[\Lambda_n]}^\varnothing$ finden und es folgt

$$\mathbf{Z}_{\Lambda_n}^\varnothing e^{(-2d\beta - |h| + \ln 2) |\Delta_n|} \leq \mathbf{Z}_{[\Lambda_n]}^\varnothing \leq \mathbf{Z}_{\Lambda_n}^\varnothing e^{(2d\beta + |h| + \ln 2) |\Delta_n|} .$$

Schätzen wir die linke Seite der Gleichung mit $\mathbf{Z}_{\Lambda_n}^\varnothing e^{(-2d\beta - |h| - \ln 2) |\Delta_n|}$ nochmals nach unten ab und benutzen, dass Δ_n maximal $|\partial^{\text{in}} \Lambda_n| |D_k|$ Kanten enthält, da durch jeden Knoten aus $\partial^{\text{in}} \Lambda_n$ maximal D_k Kanten in Δ_n resultieren. So erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$\left| \ln \mathbf{Z}_{\Lambda_n}^\varnothing - \ln \mathbf{Z}_{[\Lambda_n]}^\varnothing \right| \leq |\partial^{\text{in}} \Lambda_n| |D_k| (2d\beta + |h| + \ln 2) .$$

Nun teilen wir durch $|\Lambda_n|$, benutzen die Definition für ψ^\varnothing und es folgt

$$\left| \psi_{\Lambda_n}^\varnothing - \frac{|[\Lambda_n]|}{|\Lambda_n|} \psi_{[\Lambda_n]}^\varnothing \right| \leq \frac{|\partial^{\text{in}} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} |D_k| (2d\beta + |h| + \ln 2). \quad (3.8)$$

Mit Hilfe von (3.1) können wir folgern, dass

$$1 \leq \frac{|[\Lambda_n]|}{|\Lambda_n|} \leq 1 + \frac{|\partial^{\text{in}} \Lambda_n| |D_k|}{|\Lambda_n|} \xrightarrow{n \uparrow \infty} 1 \quad (3.9)$$

gilt. Die Gleichungen (3.1), (3.8), (3.9) und die gleichmäßige Beschränktheit von ψ_Λ^\varnothing (zum Beispiel durch die Schranke $2d\beta + |h| + \ln 2$) ermöglichen die folgende Abschätzung

$$\left| \psi_{\Lambda_n}^\varnothing - \psi_{[\Lambda_n]}^\varnothing \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für ein genügend großes n . Fügen wir nun alle drei $\frac{\varepsilon}{3}$ -Abschätzungen zu einer zusammen, erhalten wir für ein ausreichend großes n

$$\left| \psi_{\Lambda_n}^\varnothing - \psi \right| < \varepsilon. \quad (3.10)$$

□

Beweis. (Unabhängigkeit von der Randbedingung)

Damit wir die beweisen können, dass der Druck unabhängig von der Randbedingung ist, vergleichen wir zunächst die Energie für verschiedene Randbedingungen. Mit einer ähnlichen Begründung wie bei (3.7) erhalten wir $|\mathcal{H}_\Lambda^\eta - \mathcal{H}_\Lambda^\varnothing| \leq 2d\beta |\partial^{\text{in}} \Lambda|$ für beliebige $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ und η . Das Ergebnis können wir analog zum letzten Beweis umformen zu einer Aussage über die Zustandssummen $\mathbf{Z}_\Lambda^\varnothing$ und \mathbf{Z}_Λ^η , sodass

$$e^{-\beta 2d |\partial^{\text{in}} \Lambda|} \mathbf{Z}_\Lambda^\varnothing \leq \mathbf{Z}_\Lambda^\eta \leq e^{\beta 2d |\partial^{\text{in}} \Lambda|} \mathbf{Z}_\Lambda^\varnothing$$

gilt. Setzen wir in diese Gleichung alle Λ_n ein, benutzen (3.1) und verfolgen die gleiche Strategie wie im letzten Beweis, erhalten wir das Ergebnis, dass der Grenzwert $\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \psi_\Lambda^\eta$ existiert und ψ entspricht. Analog vergleichen wir die Zustandssummen $\mathbf{Z}_\Lambda^\varnothing$ und $\mathbf{Z}_\Lambda^{\text{per}}$ und kommen zum Ergebnis, dass auch für eine periodische Randbedingung $\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \psi_\Lambda^\eta = \psi$ gilt. □

Beweis. (Konvexität)

Weil laut Lemma 3.5 der Druck $\psi_\Lambda^\#(\beta, h)$ bezüglich h konvex ist, gilt für jedes $t \in [0, 1]$ und $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\psi(\beta, th_1 + (1-t)h_2) &= \lim_{\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d} \psi_{\Lambda_n}^\#(\beta, th_1 + (1-t)h_2) \\
&\leq \lim_{\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d} \left(t\psi_{\Lambda_n}^\#(\beta, h_1) + (1-t)\psi_{\Lambda_n}^\#(\beta, h_2) \right) \\
&= t \lim_{\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d} \left(\psi_{\Lambda_n}^\#(\beta, h_1) \right) + (1-t) \lim_{\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d} \left(\psi_{\Lambda_n}^\#(\beta, h_2) \right) \\
&= t\psi(\beta, h_1) + (1-t)\psi(\beta, h_2).
\end{aligned}$$

Das beweist die Konvexität des Grenzwertes ψ bezüglich h im Limes $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$. \square

Beweis. (Symmetrie)

Zu zeigen ist, dass $h \mapsto \psi(\beta, h)$ eine gerade Funktion ist. Aufgrund der Unabhängigkeit bzgl. der Randbedingung reicht es dafür zu zeigen, dass $h \mapsto \psi_\Lambda^\varnothing(\beta, h)$ eine gerade Funktion ist. Betrachten wir dazu die Gleichung

$$\begin{aligned}
\psi_\Lambda^\varnothing(\beta, -h) &= \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, -h}^\varnothing \right) \\
&= \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \exp \left[\beta \left(\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^\varnothing} \omega_i \omega_j - h \sum_{i \in \Lambda} \omega_i \right) \right] \right).
\end{aligned}$$

Weil in Ω_Λ sowohl ω als auch $-\omega$ enthalten sind, können wir nun ω durch $-\omega$ substituieren ohne die Indexmenge der äußeren Summe zu verändern, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\psi_\Lambda^\varnothing(\beta, -h) &= \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \exp \left[\beta \left(\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^\varnothing} (-\omega_i) (-\omega_j) - h \sum_{i \in \Lambda} (-\omega_i) \right) \right] \right) \\
&= \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \exp \left[\beta \left(\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^\varnothing} \omega_i \omega_j + h \sum_{i \in \Lambda} \omega_i \right) \right] \right) \\
&= \frac{1}{|\Lambda|} \ln \left(\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^\varnothing \right) \\
&= \psi_\Lambda^\varnothing(\beta, h).
\end{aligned}$$

\square

3.2. Magnetisierung im thermodynamischen Limes

Zuerst weisen wir folgende interessante Eigenschaft

$$\beta m_{\Lambda}^{\#}(\beta, h) = \frac{\partial}{\partial h} \psi_{\Lambda}^{\#}(\beta, h) \quad (3.11)$$

nach.

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} \psi_{\Lambda}^{\#}(\beta, h) &= \frac{\partial}{\partial h} \frac{1}{|\Lambda|} \ln(\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^{\#}) \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^{\#}} \frac{\partial}{\partial h} (\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^{\#}) \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^{\#}} \frac{\partial}{\partial h} \left(\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} \exp \left[\beta \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}^{\emptyset}} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) + h \beta \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega) \right] \right) \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^{\#}} \left(\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} \left(\beta \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega) \right) \exp \left[-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}^{\#} \right] \right) \\ &= \beta \left(\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} \left(\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega) \right) \mu_{\Lambda, \beta, h}^{\#}(\omega) \right) \\ &= \beta \left\langle \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i \right\rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} \\ &= \beta m_{\Lambda}^{\#}(\beta, h). \end{aligned}$$

□

Die Eigenschaft, dass $m_{\Lambda}^{\#}(\beta, h)$ einen linearen Zusammenhang zu $\frac{\partial}{\partial h} \psi_{\Lambda}^{\#}(\beta, h)$ besitzt, führt zu der wichtigen Frage, ob dieses Verhalten auch im thermodynamischen Limes erhalten bleibt.

Partielle Antworten erhalten wir durch die Konvexität des Drucks, da wir daraus einige interessante Folgerungen herleiten können. Beispielsweise, die **einseitigen Ableitungen** von $h \mapsto \psi(\beta, h)$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial h^{-}}(\beta, h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h' \uparrow h} \frac{\psi(\beta, h') - \psi(\beta, h)}{h' - h}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial h^{+}}(\beta, h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h' \downarrow h} \frac{\psi(\beta, h') - \psi(\beta, h)}{h' - h},$$

existieren überall (durch 1. von Satz A.3) und sind links- bzw. rechtseitig stetig (durch 5.). Natürlich ist der Druck genau dann differenzierbar bzgl. h , wenn diese zwei einseitigen Ableitungen übereinstimmen. Daher wäre es praktisch für diesen

Fall die Menge

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_\beta &\stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathbb{R} \mid \psi(\beta, \cdot) \text{ ist differenzierbar am Punkt } h\} \\ &= \{h \in \mathbb{R} \mid \frac{\partial \psi}{\partial h^-} \neq \frac{\partial \psi}{\partial h^+}\}\end{aligned}$$

für ein beliebiges β zu definieren. Diese Menge \mathfrak{B}_β wird später bei der Definition der Magnetisierungsdichte im thermodynamischen Limes benutzt werden. Aus 6. vom Satz A.3 können wir noch folgern, dass die Menge \mathfrak{B}_β höchstens abzählbar sein muss. Betrachten wir das Komplement dieser Menge, um die oben gestellte Fragestellung beantworten zu können.

Der Beweis wurde aus dem Buch von Velenik [3, Cor. 3.7] übernommen.

Korollar 3.7. *Für alle $h \notin \mathfrak{B}_\beta$ ist die **durchschnittliche Magnetisierungsdichte***

$$m(\beta, h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} m_\Lambda^\#(\beta, h)$$

wohldefiniert, unabhängig sowohl von der Folge $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ als auch von der Randbedingung und erfüllt

$$\beta m(\beta, h) = \frac{\partial \psi}{\partial h}(\beta, h) \quad (3.12)$$

Die Funktion $h \mapsto m(\beta, h)$ ist monoton steigend auf $\mathbb{R} \setminus \mathfrak{B}_\beta$. Darüber hinaus, ist die Funktion stetig an jedem $h \notin \mathfrak{B}_\beta$ und umgekehrt ist die Funktion unstetig an jedem $h \in \mathfrak{B}_\beta$.

Für jedes $h \in \mathfrak{B}_\beta$ gilt außerdem,

$$\lim_{h' \downarrow h} m(\beta, h') = \frac{\partial \psi}{\partial h^+}(\beta, h), \quad \lim_{h' \uparrow h} m(\beta, h') = \frac{\partial \psi}{\partial h^-}(\beta, h). \quad (3.13)$$

*Insbesondere ergibt sich, dass die **spontane Magnetisierung***

$$m^*(\beta) = \lim_{h \downarrow 0} m(\beta, h) \quad (3.14)$$

immer wohldefiniert ist.

Beweis. Sei $h \in \mathfrak{B}_\beta$, dann folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial h}(\beta, h) = \frac{\partial}{\partial h} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \psi_\Lambda^\#(\beta, h) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{\partial}{\partial h} \psi_\Lambda^\#(\beta, h) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} m_\Lambda^\#(\beta, h) = m(\beta, h),$$

dabei folgt die zweite Gleichheit aus 7. vom Satz A.3 und die dritte von der Gleichung (3.11).

Nun haben wir die Gleichung (3.12), die Existenz der Magnetisierungsdichte im thermodynamischen Limes und die Unabhängigkeit bzgl. der Folge Λ und auch der Randbedingung gezeigt.

Die Monotonie und die Stetigkeit von $h \mapsto m(\beta, h)$ auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \mathfrak{B}_\beta$ erhalten wir durch 4. und 5. vom Satz A.3.

Zuletzt beweisen wir noch (3.14), dafür wähle $h \in \mathfrak{B}_\beta$ und $(h_k)_{k \geq 1}$ sei eine beliebige Folge aus $\mathbb{R} \setminus \mathfrak{B}_\beta$ mit $h_k \downarrow h$ (es ist möglich eine solche Folge zu wählen, da \mathfrak{B}_β höchstens abzählbar ist). Mit (3.12) erhalten wir, $\frac{\partial \psi}{\partial h^+}(\beta, h_k) = m(\beta, h_k)$ für alle k . Daraus folgt die Gleichung (3.14) durch (3.12) und 5. vom Satz A.3. \square

Erste Definition eines Phasenübergangs

Das Korollar 3.7 zeigt uns, dass die durchschnittliche Magnetisierungsdichte genau dann unstetig ist, wenn der Druck nicht differenzierbar ist. Es ist folglich essentiell diese beiden Fälle zu unterscheiden, daher definieren wir:

Definition 3.8. *Der Druck ψ weist genau dann einen **Phasenübergang erster Ordnung** bei (β, h) auf, wenn $h \mapsto \psi(\beta, h)$ an diesem Punkt nicht differenzierbar ist.*

Im Abschnitt 6.1 werden wir einen solchen Phasenübergang noch auf eine andere Art und Weise definieren. Allerdings werden wir dann einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz benutzen.

4. Das eindimensionale Ising-Modell

Nach den hauptsächlich theoretischen Grundlagen soll in diesem Kapitel das eindimensionale Ising-Modell betrachtet werden. Dieser Spezialfall ist sehr anschaulich, da der Druck explizit berechnet werden kann. Dadurch soll der Leser eine bessere Einsicht in die Funktionsweise des Modells erhalten.

Satz 4.1. *Es sei $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $h \in \mathbb{R}$, dann ist der Druck des eindimensionalen Ising-Modells gegeben durch*

$$\psi(\beta, h) = \beta + \ln \left(\cosh(\beta h) \pm \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta}} \right). \quad (4.1)$$

Die Vorgehensweise und Teile des Beweises wurden aus dem Buch von Velenik [3, Kap. 3.3] übernommen.

Beweis. Wie wir aus Satz 3.6 wissen, ist der Druck unabhängig von der Wahl der Randbedingung und der Folge von Mengen $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}$. Daher wählen wir $\Lambda_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ und es sollen periodische Randbedingungen gelten. Der große Vorteil dieser Annahmen ist, dass wir $\mathbf{Z}_{\Lambda_n, \beta, h}^{\text{per}}$ als Spur einer 2×2 Matrix darstellen können. Daher schreiben wir

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\Lambda_n, \beta, h}^{\text{per}} &= \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda_n}} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda_n, h}^{\text{per}}(\omega)} \\ &= \sum_{\omega_0 = \pm 1} \cdots \sum_{\omega_{n-1} = \pm 1} \prod_{i=0}^{n-1} e^{\omega_i \omega_{i+1} + h \omega_i}. \end{aligned}$$

Wir ersetzen nun jede Summe über $\omega = \pm 1$ durch eine Summe über i von 1 bis 2 und die Exponentialfunktion durch einen Eintrag aus der Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} e^{\beta + \beta h} & e^{-\beta + \beta h} \\ e^{-\beta - \beta h} & e^{\beta - \beta h} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten die folgende Darstellung für die Zustandssumme:

$$\mathbf{Z}_{\Lambda_n, \beta, h}^{\text{per}} = \sum_{i_0=1}^2 \cdots \sum_{i_{n-1}=1}^2 \prod_{k=0}^{n-1} A_{i_k i_{k+1}},$$

wobei $i_n = i_0$.

Um letztendlich zu der nützlichen Eigenschaft zu kommen, dass die Zustandssumme

$\mathbf{Z}_{\Lambda_n, \beta, h}^{\text{per}}$ als die Spur der n -ten Potenz von A ausgedrückt werden kann, fehlt uns noch die Gleichung

$$\text{tr}(A^n) = \sum_{i_0=1}^2 \cdots \sum_{i_{n-1}=1}^2 \prod_{k=0}^{n-1} A_{i_k i_{k+1}}. \quad (4.2)$$

Für den Beweis dieser Gleichung wird die Methode der vollständigen Induktion benutzt, weswegen dieser aber sehr technisch ist und im Anhang beim Abschnitt „Beweise“ nachgelesen werden kann.

Somit folgt:

$$\mathbf{Z}_{\Lambda_n, \beta, h}^{\text{per}} = \text{tr}(A^n). \quad (4.3)$$

Um einen expliziten Ausdruck für diese Spur zu erhalten, bestimmen wir zunächst die Eigenwerte, indem wir das charakteristische Polynom von A aufstellen:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= (e^{\beta+\beta h} - \lambda)(e^{\beta-\beta h} - \lambda) - e^{-\beta+\beta h} e^{-\beta-\beta h} \\ &= \lambda^2 - (e^{\beta+\beta h} + e^{\beta-\beta h})\lambda + (e^{2\beta} - e^{-2\beta}) \\ &= \lambda^2 - (2e^\beta \cosh(\beta h))\lambda + 2\sinh(2\beta). \end{aligned}$$

Daraus bestimmen wir nun die Nullstellen und erhalten somit die Eigenwerte von A :

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= e^\beta \cosh(\beta h) \pm \sqrt{e^{2\beta} \cosh^2(\beta h) - 2\sinh(2\beta)} \\ &= e^\beta \left(\cosh(\beta h) \pm \sqrt{\cosh^2(\beta h) - 1 + e^{-4\beta}} \right) \\ &= e^\beta \left(\cosh(\beta h) \pm \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta}} \right). \end{aligned}$$

Die obige Diskriminante ist positiv, da $\sinh^2(\beta h)$ und $e^{-4\beta}$ positiv sind. Daraus folgt, dass wir tatsächlich 2 verschiedene Eigenwerte erhalten haben und können die zugehörige Matrix in der Form $A = BDB^{-1}$ diagonalisieren, wobei $D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$ gilt. Zusätzlich nutzen wir (4.3) und die Kommutativität zweier Matrizen innerhalb der Spur $\text{tr}(GH) = \text{tr}(HG)$ und erhalten dann

$$\mathbf{Z}_{\Lambda_n, \beta, h}^{\text{per}} = \text{tr}(A^n) = \text{tr}(BD^n B^{-1}) = \text{tr}(D^n) = \lambda_+^n + \lambda_-^n.$$

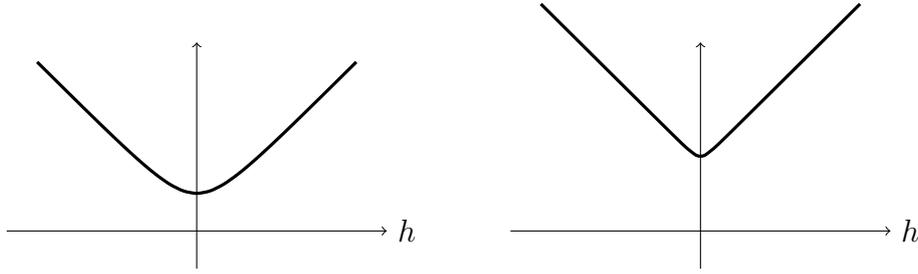


Abbildung 4.1.: Der Druck $h \mapsto \psi(\beta, h)$ des eindimensionalen Ising-Modells, analytisch in h für alle Temperaturen ($\beta = 0.2$ links, $\beta = 1.3$ rechts), sinngemäß aus [3, S.90, Fig. 3.4].

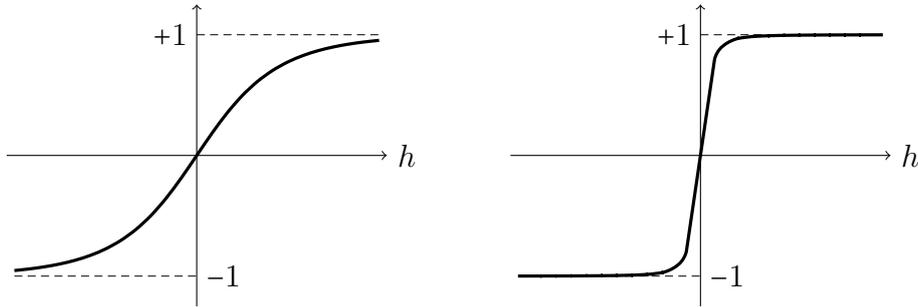


Abbildung 4.2.: Die durchschnittliche Magnetisierungsdichte $m(\beta, h)$ des eindimensionalen Ising-Modells (β gewählt wie in Abb. 4.1), sinngemäß aus [3, S.90, Fig. 3.5].

Aus $\lambda_+ > \lambda_-$ und $|\Lambda_n| = n$ folgt weiterhin

$$\begin{aligned}
 \psi(\beta, h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \ln(\mathbf{Z}_{\Lambda_n, \beta, h}^{\text{per}}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\lambda_+^n + \lambda_-^n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln\left(\lambda_+^n \left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^n\right)\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(n \ln(\lambda_+) + \ln\left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^n\right)\right) \\
 &= \ln(\lambda_+).
 \end{aligned}$$

Das beweist (4.1). □

Die explizite Formel für die Funktion des Drucks aus (4.1) gibt uns Aufschluss über die Differenzierbarkeit von $h \mapsto \psi(\beta, h)$ für ein beliebiges $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, die sogar überall und für eine beliebige Anzahl von Ableitungen erhalten bleibt, somit gilt $\mathfrak{B}_\beta = \emptyset$ für $d = 1$. Mit Hilfe des Zusammenhangs (3.12) können wir auch die durchschnittliche Magnetisierungsdichte in einem Diagramm veranschaulichen. Wie oben erwähnt ist $h \mapsto \psi(\beta, h)$ analytisch, folglich ist dessen Ableitung $h \mapsto \beta m(\beta, h)$ und somit auch die durchschnittliche Magnetisierungsdichte $h \mapsto m(\beta, h)$ analytisch und insbesondere auch stetig. Daraus folgt $m^*(\beta) = \lim_{h \downarrow 0} m(\beta, h) = m(\beta, 0)$. In

dem Satz 3.6 wurde gezeigt, dass ψ eine gerade Funktion bezüglich h ist, also gilt $\psi(\beta, h) = \psi(\beta, -h)$ bzw. $0 = \psi(\beta, h) - \psi(\beta, -h)$. Mit einigen Umformungen folgt $\frac{\partial \psi}{\partial h}(\beta, 0) = 0$.⁵

Das zeigt, dass die spontane Magnetisierung des eindimensionalen Ising-Modells für beliebige Temperaturen $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ den Wert 0 annimmt:

$$m^*(\beta) = 0. \quad (4.4)$$

Also weist das eindimensionale Ising-Modell ausschließlich paramagnetisches Verhalten auf oder anders ausgedrückt, es tritt für keine inverse Temperatur β ein Phasenübergang beim Druck auf.

Wollen wir uns nun so eine Größe wie den Druck in höheren Dimensionen betrachten, dann müssen wir feststellen, dass dies sehr schwierig oder sogar unmöglich ist. So haben Forscher es beispielsweise im zweidimensionalen Modell nicht geschafft, eine allgemeine Formel für den Druck herzuleiten. Aber zumindest einen Teilerfolg konnte Onsager verzeichnen, indem er eine Formel für den Druck mit der zusätzlichen Bedingung $h = 0$ herleitete:

$$\psi(\beta, 0) = \ln(2) + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(\cosh^2(2\beta) - \sinh(2\beta)(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)) d\theta_1 d\theta_2 \quad (4.5)$$

Die Ergebnisse können genauer im Artikel von Onsager [6] nachgelesen werden. In höheren Dimensionen sind andere Methoden notwendig, um Aussagen über Ising-Modelle treffen zu können. Im nächsten Kapitel werden wir uns mit den Gibbs-Zuständen vertraut machen, die eine Möglichkeit zur Verallgemeinerung in höhere Dimensionen bieten.

⁵ $0 = \frac{\partial}{\partial h}(\psi(\beta, h) - \psi(\beta, -h)) = \frac{\partial \psi}{\partial h}(\beta, h) - \frac{\partial \psi}{\partial h}(\beta, -h) \cdot (-1) = \frac{\partial \psi}{\partial h}(\beta, h) + \frac{\partial \psi}{\partial h}(\beta, -h).$

5. Der Gibbs-Zustand

Aus dem Druck können wir nur Informationen über das thermodynamische Verhalten von Systemen mit großem Volumen Λ gewinnen. Interessieren wir uns jedoch für die mathematischen Eigenschaften von Funktionen des Modells oder den Einfluss von zwei zueinander weit entfernten Spins, müssen wir das Verhalten des Modells in unendlichen Volumen verstehen.

Eine Möglichkeit dies zu verstehen, ist ein Gibbs-Maß mit einem unendlichen Volumen zu definieren, indem wir eine Folge $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ wählen und dann die Häufungspunkte von Funktionsfolgen wie $(\mu_{\Lambda_n, \beta, h}^{\eta_n})_{n \geq 1}$ betrachten. Dieser Blickwinkel erfordert aber ein tiefer gehendes Verständnis in sowohl der Topologie als auch in der Maßtheorie und würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen.

Daher widmen wir uns in diesem Kapitel einem anderen Ansatz, der ein nicht so ausgeprägtes Vorwissen benötigt. Dazu werden wir einen **Zustand** definieren und später auf den unendlichen Fall verallgemeinern. Hierbei orientieren wir uns an der Vorgehensweise von Velenik [3, Kap. 3.4-3.6].

Definition 5.1. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **lokal**, wenn eine Menge $\Delta \Subset \mathbb{Z}^d$ existiert, sodass $f(\omega) = f(\omega')$ erfüllt wird, sobald ω und ω' auf Δ übereinstimmen. Die kleinste solche Menge Δ wird **Träger** (oder engl. **support**) genannt und wird bezeichnet mit $\text{supp}(f)$.

Bemerkung 5.2. Sofern nicht anders gesagt, meinen wir ab sofort, wenn wir eine Funktion mit f bezeichnen, immer eine Funktion, die von Ω nach \mathbb{R} abbildet.

Beispiel 5.3. σ_0 (gibt den Wert des Spins beim Ursprung aus) und $m_\Lambda = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i$ (gibt die Magnetisierungsdichte in einer Menge $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ aus) sind lokale Funktionen mit dem Träger $\{0\}$ bzw. Λ . Der Träger enthält folglich alle Knoten der Spins von der unsere lokale Funktion abhängig ist.

Bemerkung 5.4. Wir werden die folgende Ungenauigkeit für eine bessere Übersichtlichkeit in der Notation hinnehmen:

Wenn f eine lokale Funktion ist und $\Delta \supset \text{supp}(f)$ gilt, dann ist für jedes $\omega' \in \Omega_\Delta$ $f(\omega)$ definiert als der Wert der Funktion f , die für jede Konfiguration $\omega \in \Omega$, sodass $\omega_i = \omega'_i$ für alle $i \in \Delta$ ausgewertet wird.

Definition 5.5. Ein **Zustand** $\langle \cdot \rangle$ ist eine Abbildung, die eine beliebige lokale Funktionen f, g auf eine reelle Zahl $\langle f \rangle$ abbildet, und besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Normiertheit: $\langle 1 \rangle = 1$.
- Positivität: Wenn $f \geq 0$, dann $\langle f \rangle \geq 0$.
- Linearität: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle f + \lambda g \rangle = \langle f \rangle + \lambda \langle g \rangle$.

Der Wert $\langle f \rangle$ wird als der **Mittelwert von f im Zustand $\langle \cdot \rangle$** bezeichnet.

Bemerkung 5.6. Rufen wir uns die Definition 2.9 des Erwartungswertes zurück ins Gedächtnis:

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{\#} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} f(\omega) \mu_{\Lambda, \beta, h}^{\#}(\omega). \quad (5.1)$$

Dieser Erwartungswert ist bezüglich des Gibbs-Maßes sogar ein Zustand: Die Normiertheit folgt direkt aus der Tatsache, dass das Gibbs-Maß $\mu_{\Lambda, \beta, h}^{\#}$ ebenfalls normiert ist. Es ist ersichtlich, dass die Positivität des Erwartungswertes gilt, weil die Funktion f und das Gibbs-Maß $\mu_{\Lambda, \beta, h}^{\#}$ positiv ist. Zuletzt folgt die Linearität aus der Rechnung:

$$\text{Für jedes } \lambda \in \mathbb{R} \text{ gilt } \langle f + \lambda g \rangle_{\beta, h}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ + \lambda \langle g \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+) = \langle f \rangle_{\beta, h}^+ + \lambda \langle g \rangle_{\beta, h}^+.$$

Wir bezeichnen diesen Erwartungswert aus Gleichung 5.1 ab sofort als **Gibbs-Zustand mit endlichem Volumen**.

Definition 5.7. Es sei $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ und $(\#_n)_{n \geq 1}$ sei eine Folge von Randbedingungen. Die Folge von Gibbs-Zuständen mit endlichem Volumen $(\langle \cdot \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^{\#})_{n \geq 1}$ **konvergieren gegen den Zustand $\langle \cdot \rangle$** genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^{\#} = \langle f \rangle$$

für jede lokale Funktion f erfüllt ist. Der Zustand wird dann auch **Gibbs-Zustand mit unendlichem Volumen** bei (β, h) genannt.

Bemerkung 5.8. Wenn wir später nur von einem **Gibbs-Zustand** reden, so ist der Gibbs-Zustand mit unendlichem Volumen gemeint.

Jetzt wollen wir noch den Begriff der Translationsinvarianz eines Gitters definieren. Da die eben definierten Gibbs-Zustände auf unendlichen Gittern definiert sind, ist es sinnvoll, die translationsinvarianten Gitter gesondert zu betrachten. Die **Translation** (um $j \in \mathbb{Z}^d$) $\theta_j : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ ist für $i \in \mathbb{Z}^d$ definiert als

$$\theta_j i \stackrel{\text{def}}{=} i + j.$$

Translationen können ebenfalls auf Konfigurationen wirken: Sei $\omega \in \Omega$, dann ist $\theta_j \omega$ definiert durch

$$(\theta_j \omega)_i \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{i-j}. \quad (5.2)$$

Definition 5.9. *Es sei f eine lokale Funktion und $j \in \mathbb{Z}^d$. Ein Zustand $\langle \cdot \rangle$ ist dann **translationsinvariant**, wenn $\langle f \circ \theta_j \rangle = \langle f \rangle$ gilt.*

Es ergibt sich aufgrund der obigen Definitionen die Frage: Lassen sich solche Gibbs-Zustände abhängig von (β, h) für das Ising-Modell konstruieren? Der folgende Satz wird diese Frage beantworten, indem er für die festen Randbedingungen η^+ und η^- , die der konstanten positiven bzw. negativen Konfiguration entsprechen, eben solche Gibbs-Zustände konstruiert. Diese Zustände werden von zentraler Bedeutung in den weiteren Betrachtungen sein.

Satz 5.10. *Es sei $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h \in \mathbb{R}$ und $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$. Die Gibbs-Zustände mit endlichen Volumina und den festen Randbedingungen η^+ oder η^- konvergieren gegen die Gibbs-Zustände mit unendlichem Volumen:*

$$\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \cdot \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+, \quad \langle \cdot \rangle_{\beta, h}^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \cdot \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^-. \quad (5.3)$$

Die Zustände $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$ und $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$ sind nicht abhängig von der Folge $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$. Zusätzlich sind beide translationsinvariant.

Den Beweis werden wir am Ende dieses Kapitels nachholen, sobald wir alle nötigen Werkzeuge zur Verfügung haben.

Bemerkung 5.11. *Der obige Satz behauptet nicht, dass $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$ und $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$ verschiedene Gibbs-Zustände sind. Wir werden im Kapitel 6 „Phasendiagramm des Ising-Modells“ noch genauer erörtern, für welche β und h das der Fall sein wird.*

5.1. Zwei Familien von lokalen Funktionen

Die Konstruktion von Gibbs-Zuständen basiert darauf, die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^{\eta_n}$$

für jede lokale Funktion zu beweisen. Das erscheint recht aufwendig, weswegen wir dieses Problem vereinfachen, indem wir es auf eine bestimmte Familie von Funktionen einschränken. Das folgende Lemma bietet eine ebensolche Familie von Funktionen, die sich besonders für den Einsatz von sogenannten Korrelationsungleichungen, die im nächsten Kapitel eingeführt werden, eignen. Sei $A \Subset \mathbb{Z}^d$,

$$\sigma_A \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j \in A} \sigma_j, \quad n_A \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j \in A} n_j, \quad (5.4)$$

wobei $n_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(1 + \sigma_j)$ die **Belegungsvariable** bei j bezeichnet. Diese Variable n_j nimmt die zwei Werte 0 („nicht belegt“) oder 1 („belegt“) an, daher auch der Name.

Lemma 5.12. *Sei f eine lokale Funktion. Es existieren reelle Koeffizienten $(\hat{f}_A)_{A \subset \text{supp}(f)}$ und $(\tilde{f}_A)_{A \subset \text{supp}(f)}$, sodass die folgenden Darstellungen möglich sind:*

$$f = \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \hat{f}_A \sigma_A, \quad f = \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \tilde{f}_A n_A.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir die folgende Orthogonalitätsbeziehung: Für alle $B \subset \mathbb{Z}^d$ und beliebige Konfigurationen $\omega, \tilde{\omega}$ gilt

$$2^{-|B|} \sum_{A \subset B} \sigma_A(\omega) \sigma_A(\tilde{\omega}) = \mathbf{1}_{\{\omega_i = \tilde{\omega}_i, \forall i \in B\}}. \quad (5.5)$$

Dafür nehmen wir zunächst an, dass $\omega_i = \tilde{\omega}_i$ für alle $i \in B$ gilt. In diesem Fall folgt $\sigma_A(\omega) \sigma_A(\tilde{\omega}) = \prod_{i \in A} \omega_i \tilde{\omega}_i = 1$, da $\omega_i \tilde{\omega}_i = \omega_i^2 = 1$ für alle $i \in A \subset B$.

Nun zum anderen Fall: Angenommen mindestens ein Knoten $i \in B$ existiert, sodass $\omega_i \neq \tilde{\omega}_i$ bzw. $\omega_i \tilde{\omega}_i = -1$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{A \subset B} \sigma_A(\omega) \sigma_A(\tilde{\omega}) &= \sum_{A \subset B \setminus \{i\}} (\sigma_A(\omega) \sigma_A(\tilde{\omega}) + \sigma_{A \cup \{i\}}(\omega) \sigma_{A \cup \{i\}}(\tilde{\omega})) \\ &= \sum_{A \subset B \setminus \{i\}} (\sigma_A(\omega) \sigma_A(\tilde{\omega}) + \omega_i \tilde{\omega}_i \sigma_A(\omega) \sigma_A(\tilde{\omega})) \\ &= \sum_{A \subset B \setminus \{i\}} \sigma_A(\omega) \sigma_A(\tilde{\omega}) (1 + \omega_i \tilde{\omega}_i) = 0. \end{aligned}$$

Fassen wir die Ergebnisse der beiden Fälle zusammen, beweist das (5.5).

Nun kommen wir zum Beweis des eigentlichen Lemmas. Wir wenden (5.5) mit $B = \text{supp}(f)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sum_{\omega' \subset \Omega_{\text{supp}(f)}} f(\omega') \mathbf{1}_{\{\omega_i = \omega'_i, \forall i \in \text{supp}(f)\}} \\ &= \sum_{\omega' \subset \Omega_{\text{supp}(f)}} f(\omega') 2^{-|\text{supp}(f)|} \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \sigma_A(\omega) \sigma_A(\omega') \\ &= \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \left(2^{-|\text{supp}(f)|} \sum_{\omega' \subset \Omega_{\text{supp}(f)}} f(\omega') \sigma_A(\omega') \right) \sigma_A(\omega). \end{aligned}$$

Das zeigt die erste Gleichung des Lemmas mit

$$\hat{f}_A = 2^{-|\text{supp}(f)|} \sum_{\omega' \in \Omega_{\text{supp}(f)}} f(\omega') \sigma_A(\omega').$$

Die zweite Gleichheit folgt aus der ersten und der Beziehung $\sigma_A = \prod_{i \in A} (2n_i - 1)$. \square

Bemerkung 5.13. *Durch das eben gezeigte Lemma und der Linearität der Zustände wird das Überprüfen der Konvergenzeigenschaft von $(\langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^n)_{n \geq 1}$ vereinfacht, sodass*

wir die Konvergenz nur noch für $(\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^{\eta_n})_{n \geq 1}$ oder $(\langle n_A \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^{\eta_n})_{n \geq 1}$ für alle $A \in \mathbb{Z}^d$ nachweisen müssen.

5.2. Korrelationsungleichungen

Korrelationsungleichungen sind für die mathematische Analyse des Ising-Modells unerlässlich. Wir werden sie für die Konstruktion von $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$, $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$ und den Nachweis von vielen anderen Eigenschaften benutzen.

Man kann viele solcher Ungleichungen für das Ising-Modell finden, aber wir werden uns auf die zwei Bekanntesten beschränken: die GKS- und die FKG-Ungleichungen. Dabei werden wir auf das Ausschreiben der Beweise in dieser Arbeit verzichten, da diese rein technischer Natur sind und wenig zum Verständnis beitragen. Die Beweise für die GKS- und die FKG-Ungleichungen können im Buch von Velenik [3, Kap. 3.8] nachgelesen werden.

Die GKS-Ungleichungen

Bevor wir uns den GKS-Ungleichungen widmen, wollen wir die Anschauung hinter den Ungleichungen verstehen. Dazu stellen wir uns ein Ising-Modell für ein Volumen Λ mit der „,+“ Randbedingung vor. Wie im Abschnitt 2.2 erwähnt, begünstigt das ferromagnetische Verhalten des Modells die Gleichausrichtung der Spins. Daher wird auch eher eine nichtnegative Magnetisierungsdichte innerhalb der „,+“ Randbedingung begünstigt, zumindest wenn $h \geq 0$. Sei i also ein beliebiger Punkt in Λ , so ist es logisch zu erwarten, dass $h \geq 0$ folgendes impliziert:

$$\langle \sigma_i \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \geq 0. \quad (5.6)$$

Eine ähnliche Überlegung führt zu einer weiteren Ungleichung. Falls der Spin an einem beliebigen Knoten j den Wert $+1$ besitzt, sollte das nicht die Wahrscheinlichkeit senken, dass der Spin an einem anderen Knoten i ebenfalls den Wert $+1$ annimmt. Formal ausgedrückt ergibt das

$$\mu_{\Lambda, \beta, h}^+(\sigma_i = 1 \mid \sigma_j = 1) \geq \mu_{\Lambda, \beta, h}^+(\sigma_i = 1),$$

was noch weiter umgeformt werden kann zu

$$\mu_{\Lambda, \beta, h}^+(\sigma_i = 1, \sigma_j = 1) \geq \mu_{\Lambda, \beta, h}^+(\sigma_i = 1) \mu_{\Lambda, \beta, h}^+(\sigma_j = 1).$$

Das ist wiederum äquivalent zu

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \geq \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \langle \sigma_j \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+, \quad (5.7)$$

da die Beziehung $\mathbf{1}_{\{\sigma_i=1\}} = \frac{1}{2}(\sigma_i + 1)$ gilt.

Diese zwei Ungleichungen – (5.6) und (5.7) – gelten tatsächlich und entsprechen

den *GKS-Ungleichungen*, die nach Griffiths, Kelly und Scherman benannt wurden. Sie gelten sogar noch in einer etwas verallgemeinerten Form.

Satz 5.14. (*GKS-Ungleichungen*). *Es sei $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$, $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $h \in \mathbb{R}$. Zusätzlich nehmen wir an, dass $h \geq 0$ gilt. Dann folgt für alle $A, B \subset \Lambda$,*

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \geq 0, \quad (5.8)$$

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+. \quad (5.9)$$

Der Beweis kann im Buch von Velenik [3, Kap. 3.8] nachgelesen werden.

Bemerkung 5.15. *Die Ungleichungen des Satzes bleiben sogar für die anderen Gibbs-Zustände mit endlichem Volumen $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\emptyset$ und $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \beta, h}^{per}$ erhalten.*

Die FKG-Ungleichung

Definition 5.16. *Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann **monoton wachsend**, wenn $f(\omega) \leq f(\omega')$ für alle $\omega \leq \omega'$ gilt.*

Dabei bedeutet $\omega \leq \omega'$, dass $\omega_i \leq \omega'_i$ für jedes $i \in \mathbb{Z}^d$ gilt. Die *FKG-Ungleichung* (benannt nach Fortuin, Kasteleyn und Ginibre) gibt uns Auskunft über das Verhalten zweier monoton wachsenden Funktionen in einem Zustand.

Satz 5.17. (*FKG-Ungleichung*). *Es sei $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$, $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $h \in \mathbb{R}$. Außerdem stehe $\#$ für eine beliebige Randbedingung. Dann gilt für zwei monoton wachsende Funktionen f und g ,*

$$\langle fg \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \geq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\# \langle g \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#. \quad (5.10)$$

Der Beweis kann im Buch von Velenik [3, Kap. 3.8] nachgelesen werden.

5.3. Folgerungen aus den Korrelationsungleichungen

Es können viele nützliche Zusammenhänge aus den Korrelationsungleichungen hergeleitet werden. Das erste Lemma brauchen wir, um bestimmte Gesetzmäßigkeiten im thermodynamischen Limes zu untersuchen. Zunächst führen wir jedoch die Einschränkung einer Konfiguration ein.

Definition 5.18. *Es sei $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda \in \mathbb{Z}^d$ und $\omega \in \Omega_\Lambda$. Dann bezeichnet*

$$\omega|_{\tilde{\Lambda}} \in \Omega_{\tilde{\Lambda}}$$

*die **Einschränkung** von ω auf die Menge $\tilde{\Lambda}$ und besitzt die Eigenschaft $(\omega|_{\tilde{\Lambda}})_i = \omega_i$ für alle $i \in \tilde{\Lambda}$.*

Lemma 5.19. *Es sei f eine monoton steigende Funktion und $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \Subset \mathbb{Z}^d$. Dann gilt für jedes $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $h \in \mathbb{R}$,*

$$\langle f \rangle_{\Lambda_1, \beta, h}^+ \geq \langle f \rangle_{\Lambda_2, \beta, h}^+ \quad (5.11)$$

Die Gleichung bleibt für die „-“ Randbedingung und einer monoton fallenden Funktion ebenfalls wahr.

Für den Beweis benötigen wir noch eine bestimmte Markov-Eigenschaft von $\mu_{\Lambda, \beta, h}^\eta$:

Lemma 5.20. *Es sei $\Delta \subset \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, $\eta \in \Omega$ und $\omega' \in \Omega_\Lambda^\eta$. Dann gilt für alle $\omega \in \Omega_\Lambda^\eta$:*

$$\mu_{\Lambda, \beta, h}^\eta(\omega \mid \omega|_{\Lambda \setminus \Delta} = \omega'|_{\Lambda \setminus \Delta}) = \mu_{\Delta, \beta, h}^{\omega'}(\omega).$$

Wenn wir dabei $\omega|_{\Lambda \setminus \Delta} = \omega'|_{\Lambda \setminus \Delta}$ schreiben, meinen wir eigentlich $\sigma_i(\omega) = \omega'_i, \forall i \in \Lambda \setminus \Delta$.

Beweis. Es sei $\Delta \subset \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$. Wähle die Konfigurationen $\eta \in \Omega$ und $\omega' \in \Omega_\Lambda^\eta$ fest, aber beliebig.

Für alle $\omega \in \Omega_\Lambda^\eta$ gilt

$$\mu_{\Lambda, \beta, h}^\eta(\omega \mid \omega|_{\Lambda \setminus \Delta} = \omega'|_{\Lambda \setminus \Delta}) = \frac{\mu_{\Lambda, \beta, h}^\eta(\omega|_\Delta \omega'|_{\mathbb{Z}^d \setminus \Delta})}{\mu_{\Lambda, \beta, h}^\eta(\omega|_{\Lambda \setminus \Delta} = \omega'|_{\Lambda \setminus \Delta})},$$

dabei bezeichnet $\omega|_\Delta \omega'|_{\mathbb{Z}^d \setminus \Delta}$ die **kombinierte Konfiguration** aus ω und ω' , sodass diese auf Δ mit ω und auf $\mathbb{Z}^d \setminus \Delta$ mit ω' identisch ist.

Hierbei ist zu beachten, dass die Konfigurationen ω und ω' außerhalb von Λ immer übereinstimmen, da beide aus Ω_Λ^η stammen und somit $\omega|_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} = \eta|_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} = \omega'|_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$ gilt. Die Bedingung im Maß des Nenners lautet $\omega|_{\Lambda \setminus \Delta} = \omega'|_{\Lambda \setminus \Delta}$, weil diese Bedingung aber keine Aussage über die Spins innerhalb von Δ trifft, können wir diese mit Hilfe der Additivität des Maßes als Summe umschreiben und Folgendes berechnen:

$$\begin{aligned}
\mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta(\omega \mid \omega|_{\Lambda \setminus \Delta} = \omega'|_{\Lambda \setminus \Delta}) &= \frac{\mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta(\omega|_{\Delta} \omega'|_{\mathbb{Z}^d \setminus \Delta})}{\sum_{\substack{\tilde{\omega} \in \Omega_{\Lambda}^\eta \\ \tilde{\omega}|_{\Lambda \setminus \Delta} = \omega'|_{\Lambda \setminus \Delta}}} \mu_{\Lambda,\beta,h}^\eta(\tilde{\omega})} \\
&= \frac{\exp \left[\beta \left(\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_{\Delta}^f} \omega_i \omega_j + h \sum_{i \in \Delta} \omega_i \right) + \beta \left(\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda \setminus \Delta}^f} \omega'_i \omega'_j + h \sum_{i \in \Lambda \setminus \Delta} \omega'_i \right) \right]}{\sum_{\substack{\tilde{\omega} \in \Omega_{\Lambda}^\eta \\ \tilde{\omega}|_{\Lambda \setminus \Delta} = \omega'|_{\Lambda \setminus \Delta}}} \exp \left[\beta \left(\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}^f} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j + h \sum_{i \in \Lambda} \tilde{\omega}_i \right) \right]} \\
&= \frac{\exp \left[\beta \left(\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_{\Delta}^f} \omega_i \omega_j + h \sum_{i \in \Delta} \omega_i \right) + \beta \left(\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda \setminus \Delta}^f} \omega'_i \omega'_j + h \sum_{i \in \Lambda \setminus \Delta} \omega'_i \right) \right]}{\exp \left[\beta \left(\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda \setminus \Delta}^f} \omega'_i \omega'_j + h \sum_{i \in \Lambda \setminus \Delta} \omega'_i \right) \right] \mathbf{Z}_{\Delta,\beta,h}^{\omega'}}} \\
&= \frac{\exp \left[\beta \left(\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_{\Delta}^f} \omega_i \omega_j + h \sum_{i \in \Delta} \omega_i \right) \right]}{\mathbf{Z}_{\Delta,\beta,h}^{\omega'}}} \\
&= \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Delta,\beta,h}^{\omega'}} \exp[-\beta \mathcal{H}].
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der dritten Gleichheit im Nenner den Fakt benutzt, dass die Spins von $\tilde{\omega}$ außerhalb von Δ fixiert sind, sodass wir den von $\tilde{\omega}$ unabhängigen Faktor vor die Summe schreiben konnten. \square

Beweis von Lemma 5.19. Aus der eben bewiesenen Markov-Eigenschaft (5.20) folgt

$$\langle f \rangle_{\Lambda_1,\beta,h}^+ = \langle f \mid \sigma_i = 1, \forall i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1 \rangle_{\Lambda_2,\beta,h}^+.$$

Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{\{\sigma_i=1, \forall i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1\}}$ ist eine monoton wachsende Funktion, deswegen können wir die FKG-Ungleichung anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\langle f \rangle_{\Lambda_1,\beta,h}^+ &= \frac{\langle f \mathbf{1}_{\{\sigma_i=1, \forall i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1\}} \rangle_{\Lambda_2,\beta,h}^+}{\langle \mathbf{1}_{\{\sigma_i=1, \forall i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1\}} \rangle_{\Lambda_2,\beta,h}^+} \\
&\geq \frac{\langle f \rangle_{\Lambda_2,\beta,h}^+ \langle \mathbf{1}_{\{\sigma_i=1, \forall i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1\}} \rangle_{\Lambda_2,\beta,h}^+}{\langle \mathbf{1}_{\{\sigma_i=1, \forall i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1\}} \rangle_{\Lambda_2,\beta,h}^+} = \langle f \rangle_{\Lambda_2,\beta,h}^+.
\end{aligned}$$

\square

Im nächsten Lemma werden wir sehen, dass die Gibbs-Verteilung mit einer „+“ bzw. „-“ Randbedingung die „+“ bzw. „-“ Spins maximal bevorzugt werden.

Lemma 5.21. *f sei eine monoton wachsende Funktion. Dann gilt für $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $h \in \mathbb{R}$,*

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^- \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\eta \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+, \quad (5.12)$$

für jede Randbedingung $\eta \in \Omega$ und jedes $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$.

Beweis. Sei $I(\omega) = \exp[\beta \sum_{i \in \Lambda, j \notin \Lambda} \omega_i (1 - \eta_j)]$. Wir erkennen, dass

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}(\omega)} = \sum_{\omega' \in \Omega_\Lambda^\eta} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}(\omega')} I(\omega')$$

gilt und für jedes monoton wachsende f gilt außerdem

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}(\omega)} f(\omega) \geq \sum_{\omega' \in \Omega_\Lambda^\eta} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}(\omega')} I(\omega') f(\omega').$$

In der obigen Gleichung steht „ \geq “, da $\omega|_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda} \geq \omega'|_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$ gilt und zusammen mit der Tatsache, dass f monoton wachsend ist, folgt außerhalb von Λ dann $f(\omega) \geq f(\omega')$. Wenn wir $\text{supp}(f) \subset \Lambda$ annehmen, würde sogar die Gleichheit für eine beliebige Randbedingung η gelten. Weiterhin folgt dann,

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ = \frac{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}(\omega)} f(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}(\omega)}} \geq \frac{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}(\omega)} I(\omega) f(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}(\omega)} I(\omega)} = \frac{\langle If \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\eta}{\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\eta} \geq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\eta,$$

wo wir im letzten Schritt die wachsende Monotonie von $I(\omega)$ dafür benötigen, die FKG Ungleichung anwenden zu können. \square

Bemerkung 5.22. *Das Lemma 5.21 gilt mit der zusätzlichen Bedingung, dass f eine lokale Funktion mit $\text{supp}(f) \subset \Lambda$ bzw. $\text{supp}(f) \subset \Lambda_n$ ist, auch für die freie bzw. periodische Randbedingung:*

$$\langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^- \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\emptyset \leq \langle f \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+,$$

$$\langle f \rangle_{\Lambda_{n-1}, \beta, h}^- \leq \langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^{per} \leq \langle f \rangle_{\Lambda_{n-1}, \beta, h}^+.$$

Das folgende Lemma benötigen wir unter anderem, um den Beweis für die Existenz der Zustände $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$ und $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$ nachzuholen.

Lemma 5.23. *Für jedes $k \in \mathbb{Z}^d$, $A \subset \mathbb{Z}^d$ sind die folgenden Funktionen σ_k , n_k , n_A , $\sum_{k \in A} n_k - n_A$ monoton wachsend.*

Beweis. Für $\omega = \omega'$ folgt direkt, dass $f(\omega) = f(\omega')$ und insbesondere auch $f(\omega) \leq f(\omega')$ erfüllt ist. Daher nehmen wir $\omega \neq \omega'$ an oder anders formuliert, dass eine nicht leere Menge $I \subset \mathbb{Z}^d$ existiert, sodass einerseits $\omega_i = -1$ und $\omega'_i = 1$ (wegen $\omega \leq \omega'$) für alle $i \in I$ gilt und andererseits $\omega_j = \omega'_j$ für alle $j \in \mathbb{Z}^d \setminus I$. Im Folgenden werden wir den Beweis nur für alle Knoten der Menge I durchführen,

da für alle anderen Knoten die zugehörigen Spins aus ω und ω' übereinstimmen und somit aus $\omega_j = \omega'_j$ direkt $f(\omega_j) = f(\omega'_j)$ und auch $f(\omega_j) \leq f(\omega'_j)$, für alle $j \in \mathbb{Z}^d \setminus I$, folgt.

Für alle $i \in I$ gilt

$$\sigma_i(\omega) = \omega_i = -1 \leq 1 = \omega'_i = \sigma_i(\omega').$$

Wir benutzen die eben bewiesene Formel für σ_k und erhalten für alle $i \in I$

$$n_i(\omega) = \frac{1}{2} (1 + \sigma_i(\omega)) \leq \frac{1}{2} (1 + \sigma_i(\omega')) = n_i(\omega').$$

Mit $n_k \geq 0$ und der eben gezeigten wachsenden Monotonie von n_k folgt nun auch, dass n_A monoton wachsend ist durch

$$n_A(\omega) = \prod_{i \in A} n_i(\omega) \leq \prod_{i \in A} n_i(\omega') = n_A(\omega'),$$

für alle $i \in I$.

Den Beweis zu $\sum_{k \in A} n_k(\omega) - n_A(\omega)$ unterteilen wir in zwei Fälle. Nehmen wir erst einmal an, dass $A \cap I = \emptyset$. Daraus folgt, dass $\omega|_A = \omega'|_A$ gelten muss. Damit erhalten wir direkt

$$\sum_{k \in A} n_k(\omega) - n_A(\omega) = \sum_{k \in A} n_k(\omega') - n_A(\omega').$$

Kommen wir nun zum zweiten Fall mit der Annahme $A \cap I \neq \emptyset$. Für alle $i \in A \cap I$ gilt $\omega_i = -1$ und $\omega'_i = 1$ bzw. $n_i = 0$ und $n'_i = 1$, daher

$$\sum_{k \in A} n_k(\omega) - n_A(\omega) = \sum_{k \in A \setminus I} n_k(\omega) + \sum_{i \in A \cap I} n_i(\omega) - n_A(\omega) = \sum_{k \in A \setminus I} n_k(\omega) + 0 - 0 = \sum_{k \in A \setminus I} n_k(\omega).$$

Aus $A \cap I \neq \emptyset$ folgt $|A \cap I| \geq 1$ bzw. $|A \cap I| - 1 \geq 0$. Benutzen wir das und die wachsende Monotonie von n_k , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A \setminus I} n_k(\omega) &\leq \sum_{k \in A \setminus I} n_k(\omega') \leq \sum_{k \in A \setminus I} n_k(\omega') + |A \cap I| - 1 \\ &= \sum_{k \in A \setminus I} n_k(\omega') + \sum_{i \in A \cap I} n_i(\omega') - n_A(\omega') = \sum_{k \in A} n_k(\omega') - n_A(\omega'). \end{aligned}$$

□

Nun können wir den Beweis für die Existenz und Translationsinvarianz von $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$ und $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$ nachholen.

Beweis von Satz 5.10. Wir nehmen die „+“ Randbedingung an und f sei eine lokale Funktion. Mit Lemma 5.12 und der Linearität des Zustandes folgt

$$\langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ = \sum_{A \subset \text{supp}(f)} \tilde{f}_A \langle n_A \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+.$$

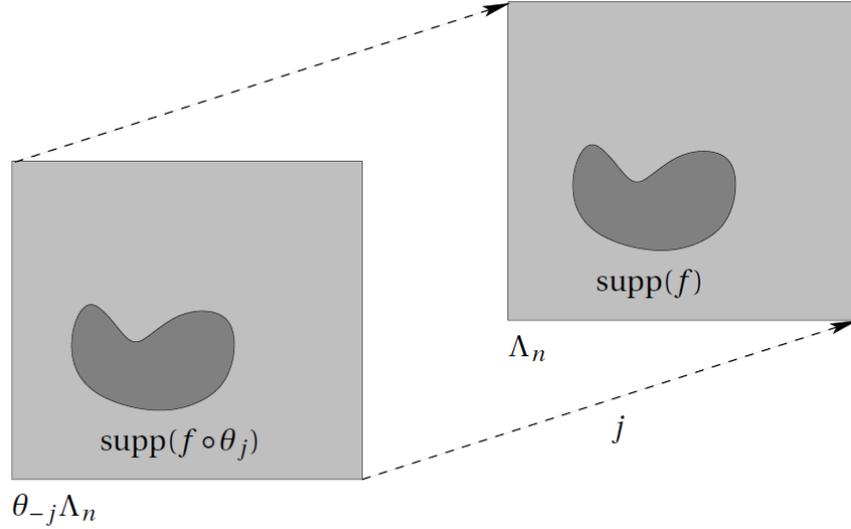


Abbildung 5.1.: Veranschaulichung für den Beweis der Translationsinvarianz, Abbildung aus [3, S.102, Fig. 3.8]

Weil die Funktion n_A monoton wachsend ist (siehe Lemma 5.23), folgt zusammen mit Lemma 5.19 für alle A und $n \geq 1$,

$$\langle n_A \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \geq \langle n_A \rangle_{\Lambda_{n+1}, \beta, h}^+.$$

Da ein Zustand nicht-negativ ist, folgt die Konvergenz $\langle n_A \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+$ für $n \rightarrow \infty$. Deswegen konvergiert $\langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+$ ebenfalls und wir bezeichnen den Grenzwert als

$$\langle f \rangle_{\beta, h}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+.$$

Da $\langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+$ normiert, nicht-negativ und linear ist, besitzt auch $\langle f \rangle_{\beta, h}^+$ diese Eigenschaften⁶ und ist somit ein Gibbs-Zustand.

Wir überprüfen nun, dass dieser Grenzwert auch wirklich nicht von der Folge $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ abhängt. Dafür seien $\Lambda_n^1 \uparrow \mathbb{Z}^d$ und $\Lambda_n^2 \uparrow \mathbb{Z}^d$ zwei solche Folgen; zu diesen können wir immer eine Folge $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ finden, sodass für alle $k \geq 1$,

$$\Delta_{2k-1} \subset \{\Lambda_n^1 \mid n \geq 1\}, \quad \Delta_{2k} \subset \{\Lambda_n^2 \mid n \geq 1\}, \quad \Delta_k \not\subset \Delta_{k+1}.$$

Natürlich gilt $\Delta_n \uparrow \mathbb{Z}^d$. Weiter oben haben wir schon gefolgert, dass der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Delta_n, \beta, h}^+$ für jede lokale Funktion f existiert. Weil $(\langle f \rangle_{\Delta_{2k-1}, \beta, h}^+)_{k \geq 1}$ eine Teilfolge von $(\langle f \rangle_{\Lambda_n^1, \beta, h}^+)_{n \geq 1}$ und $(\langle f \rangle_{\Delta_{2k}, \beta, h}^+)_{k \geq 1}$ eine Teilfolge von $(\langle f \rangle_{\Lambda_n^2, \beta, h}^+)_{n \geq 1}$ ist, folgt

⁶Normiertheit und Nicht-Negativität sind klar. Bleibt noch die Linearität: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$,
 $\langle f + \lambda g \rangle_{\beta, h}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ + \lambda \langle g \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ = \langle f \rangle_{\beta, h}^+ + \lambda \langle g \rangle_{\beta, h}^+.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n^1, \beta, h}^+ = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Delta_k, \beta, h}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n^2, \beta, h}^+$$

für alle lokale Funktionen f . Das zeigt, dass der Zustand $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$ nicht von der Wahl der Folge $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$ abhängig ist.

Es bleibt noch die Translationsinvarianz zu zeigen. Dafür sei f wieder eine lokale Funktion. Für alle $j \in \mathbb{Z}^d$ ist $f \circ \theta_j$ auch eine lokale Funktion und $\theta_{-j}\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ mit $\theta_i\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda + i$. Deswegen folgern wir

$$\langle f \circ \theta_j \rangle_{\theta_{-j}\Lambda_n, \beta, h}^+ \rightarrow \langle f \circ \theta_j \rangle_{\beta, h}^+ \quad \text{und} \quad \langle f \rangle_{\theta_{-j}\Lambda_n, \beta, h}^+ \rightarrow \langle f \rangle_{\beta, h}^+. \quad (5.13)$$

In Abbildung 5.1 wird ersichtlich, dass $\langle f \circ \theta_j \rangle_{\theta_{-j}\Lambda_n, \beta, h}^+ = \langle f \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+$ gilt. Mit (5.13) folgern wir daraus $\langle f \circ \theta_j \rangle_{\beta, h}^+ = \langle f \rangle_{\beta, h}^+$ und das zeigt die Translationsinvarianz von $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$. Der Beweis zu $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$ erfolgt analog. \square

6. Phasendiagramm des Ising-Modells

Wie vorher gezeigt können wir nun einen Gibbs-Zustand in einem unendlichen Volumen definieren, z.B. mit einer „+“ oder „-“ Randbedingung. Das nächste Problem ergibt sich beim Überprüfen, ob diese zwei Gibbs-Zustände identisch sind oder ob bestimmte Werte der Temperatur und dem externen magnetischen Feld existieren, sodass der Einfluss der Randbedingung erhalten bleibt und sich so mehrere Gibbs-Zustände bilden.

Die Antwort darauf erarbeiten wir uns im Laufe dieses Kapitels, dabei werden wir eine Abhängigkeit bezüglich der Dimension d und den Parametern β und h feststellen. In der Mathematik ist es oft so, dass auf eine Eindeutigkeit hingearbeitet wird, jedoch nicht in diesem Fall. Denn beim Auftreten zweier verschiedener Gibbs-Zustände können wir das makroskopische Verhalten nicht vorhersagen. Selbst dann nicht, wenn uns das Wissen über die Voraussetzungen des kompletten Systems (wie die Menge der Konfigurationen und der genauen Energie-Funktion) zur Verfügung steht und wir die Parameter β und h fixieren können.

Definition 6.1. *Wenn mindestens zwei unterschiedliche Gibbs-Zustände konstruiert werden können, dann sprechen wir von einem Phasenübergang erster Ordnung bei (β, h) .*

Später in diesem Kapitel (siehe Satz 6.9) werden wir eine Verbindung zwischen dieser wahrscheinlichkeitstheoretischen Definition eines Phasenübergangs und der bereits eingeführten Analytischen (siehe Definition 3.8) herstellen.

Nun wenden wir uns mit der Aufstellung eines Phasendiagramms für das Ising-Modell dem eigentlichen Ziel dieses Kapitels zu. Das bedeutet, wir untersuchen für jedes Paar (β, h) , ob es einen eindeutigen Gibbs-Zustand oder mehrere verschiedene Gibbs-Zustände existieren. Dafür stellen wir nun einen Satz auf, der alle dafür benötigten Eigenschaften zusammenfasst. Die Vorgehensweise und manche Beweise aus diesem Kapitel stammen aus dem Buch von Velenik [3, Kap. 3.7].

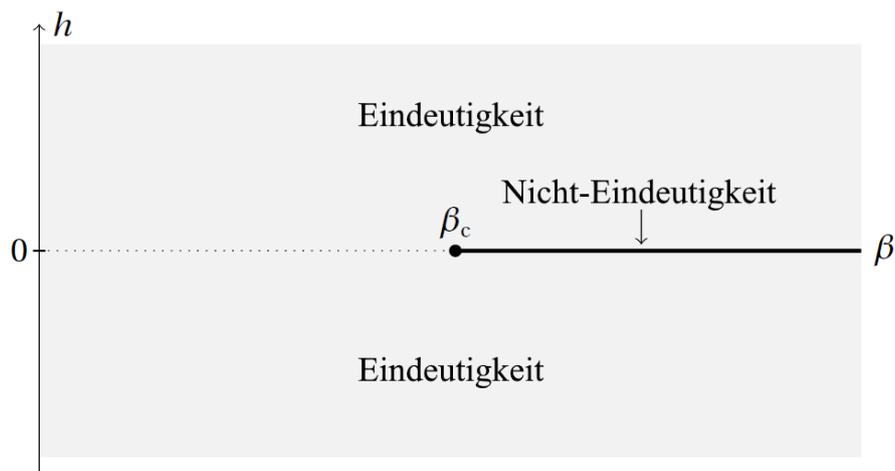


Abbildung 6.1.: Phasendiagramm des Ising-Modells für $d \geq 2$. Die Eindeutigkeit bzw. Nicht-Eindeutigkeit bezieht sich auf die Existenz der Gibbs-Zustände, Abbildung abgewandelt aus [3, S.104, Fig. 3.9].

Satz 6.2.

1. Für jedes $d \geq 1$ gilt: Aus $h \neq 0$ folgt die Existenz eines eindeutigen Gibbs-Zustandes für ein beliebiges $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
2. Für $d = 1$ existiert ein eindeutiger Gibbs-Zustand bei jedem $(\beta, h) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$.
3. Wenn $h = 0$ und $d \geq 2$, dann existiert ein $\beta_c = \beta_c(d) \in (0, \infty)$ und die folgenden Eigenschaften gelten:
 - Für $\beta < \beta_c$ ist der Gibbs-Zustand bei $(\beta, 0)$ eindeutig.
 - Für $\beta > \beta_c$ tritt ein Phasenübergang erster Ordnung bei $(\beta, 0)$ auf, also gilt $\langle \cdot \rangle_{\beta, 0}^+ \neq \langle \cdot \rangle_{\beta, 0}^-$.

Der Beweis von Satz 6.2 ist über mehrere Abschnitte verstreut. Den ersten Teil des Beweises findet man bei Velenik unter [3, Sektion 3.7.4]. Der zweite Teil wurde schon im Abschnitt 4 „Das eindimensionale Ising-Modell“ bewiesen, sobald die Ergebnisse von dort (siehe Gleichung (4.4)) mit dem Satz 6.9 in Verbindung gebracht werden. Der dritte Teil besteht aus zwei separaten Beweisen (einerseits für $\beta < \beta_c$ und andererseits für $\beta > \beta_c$), die wir noch in diesem Kapitel behandeln werden.

Bemerkung 6.3. Es kann sogar gezeigt werden, dass die Eindeutigkeit der Gibbs-Zustände für $d \geq 2$ sogar bei $(\beta_c, 0)$ erhalten bleibt. Diese Eigenschaft werden wir nicht beweisen, da dies eine andere Herangehensweise erfordert.

6.1. Zwei Kriterien für (Nicht-)Eindeutigkeit

6.1.1. Der wahrscheinlichkeitstheoretische Ansatz für Eindeutigkeit

Warum die beiden Zustände $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$ und $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$ hierbei so eine wichtige Rolle spielen, wird im nächsten Satz klar gemacht.

Satz 6.4. Sei $(\beta, h) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Es existiert ein Gibbs-Zustand bei (β, h) .
2. $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+ = \langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$.
3. $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$.

Beweis. Wir nehmen zunächst 1 an und zeigen damit 2. Dafür müssen wir erkennen, dass 1 impliziert, dass alle Gibbs-Zustände mit verschiedenen Randbedingung übereinstimmt. Daraus folgt 2.

Aus 2 folgt direkt 3, wenn wir σ_0 in 2 einsetzen.

Wenden wir uns nun dem Beweis zu, bei dem wir 3 voraussetzen und 2 folgern. Es sei $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ und $A \in \mathbb{Z}^d$. Durch Lemma 5.23 wissen wir, dass $\sum_{i \in A} n_i - n_A$ monoton wachsend ist. Mit Lemma 5.21 folgt für alle k ,

$$\left\langle \sum_{i \in A} n_i - n_A \right\rangle_{\Lambda_k, \beta, h}^- \leq \left\langle \sum_{i \in A} n_i - n_A \right\rangle_{\Lambda_k, \beta, h}^+.$$

Formen wir diese Gleichung mit Hilfe von Linearität um und bilden den Grenzwert für $k \rightarrow \infty$, erhalten wir

$$\sum_{i \in A} (\langle n_i \rangle_{\beta, h}^+ - \langle n_i \rangle_{\beta, h}^-) \geq \langle n_A \rangle_{\beta, h}^+ - \langle n_A \rangle_{\beta, h}^-. \quad (6.1)$$

Mit der Translationsinvarianz von $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^+$ bzw. $\langle \cdot \rangle_{\beta, h}^-$ und da 3 gilt, folgt

$$\langle n_i \rangle_{\beta, h}^+ - \langle n_i \rangle_{\beta, h}^- = \langle n_i \rangle_{\beta, h}^+ - \langle n_0 \rangle_{\beta, h}^- = \frac{1}{2} (\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+ - \langle \sigma_i \rangle_{\beta, h}^-) = 0.$$

Daraus folgt, dass die linke Seite der Gleichung (6.1) verschwindet. Das impliziert

$$\langle n_A \rangle_{\beta, h}^+ \leq \langle n_A \rangle_{\beta, h}^-.$$

Benutzen wir dieses Ergebnis und den Fakt, dass aus Lemma 5.21 $\langle n_A \rangle_{\beta, h}^+ \geq \langle n_A \rangle_{\beta, h}^-$ folgt, so ergibt sich am Ende $\langle n_A \rangle_{\beta, h}^+ = \langle n_A \rangle_{\beta, h}^-$. Und da sich nach Lemma 5.12 jede

lokale Funktion als Linearkombination dieser n_A schreiben lässt, impliziert das $\langle f \rangle_{\beta,h}^+ = \langle f \rangle_{\beta,h}^-$ für jede lokale Funktion f . Daraus folgt 2.

Zuletzt nehmen wir 2 an, um 1 zu zeigen. Mit Lemma 5.21 wissen wir, dass für jeden Gibbs-Zustand bei (β, h) , nennen wir ihn $\langle \cdot \rangle_{\beta,h}$, folgende Gleichung gilt:

$$\langle n_A \rangle_{\beta,h}^- \leq \langle n_A \rangle_{\beta,h} \leq \langle n_A \rangle_{\beta,h}^+.$$

Führen wir diese Formel und 2 zusammen, so erhalten wir die Gleichheit aller drei Gibbs-Zustände: $\langle n_A \rangle_{\beta,h}^- = \langle n_A \rangle_{\beta,h} = \langle n_A \rangle_{\beta,h}^+$. Erneut benutzen wir Lemma 5.12, um dieses Ergebnis auf alle lokalen Funktionen f zu verallgemeinern und folgern $\langle \cdot \rangle_{\beta,h}^- = \langle \cdot \rangle_{\beta,h} = \langle \cdot \rangle_{\beta,h}^+$ und somit auch 1. \square

Erinnern wir uns an die durchschnittliche Magnetisierungsdichte in $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ für eine beliebige Randbedingung, die durch $m_\Lambda^\#(\beta, h) = \langle m_\Lambda \rangle_{\Lambda, \beta, h}^\#$ definiert war. In Satz 6.4 haben wir ein Kriterium für Eindeutigkeit, das ausschließlich von den Größen $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+$ und $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^-$ abhängt. Jetzt ergibt sich die Frage, ob die durchschnittliche Magnetisierungsdichte mit diesen Größen in Verbindung steht. In der folgenden Proposition werden wir diesen Sachverhalt genauer untersuchen.

Proposition 6.5. *Für jede Folge $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$, existieren die Grenzwerte*

$$m^+(\beta, h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} m_\Lambda^+(\beta, h), \quad m^-(\beta, h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} m_\Lambda^-(\beta, h)$$

und es gilt

$$m^+(\beta, h) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+, \quad m^-(\beta, h) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^-.$$

Außerdem ist $h \mapsto m^+(\beta, h)$ rechtsseitig stetig und $h \mapsto m^-(\beta, h)$ linksseitig stetig.

Beweis. Sei $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$. Mit der Translationsinvarianz von $\langle \cdot \rangle_{\beta,h}^+$ können wir $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+$ wie folgt umformen,

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+ = \left\langle \frac{1}{|\Lambda|} (|\Lambda| \sigma_0) \right\rangle_{\beta,h}^+ = \left\langle \frac{1}{|\Lambda|} \left(\sum_{i \in \Lambda} \sigma_i \right) \right\rangle_{\beta,h}^+ = \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\beta,h}^+.$$

Nutzen wir dieses Ergebnis und schätzen es mit Hilfe der Monotonie-Eigenschaft aus (5.12) ab, so erhalten wir

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+ = \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\beta,h}^+ \leq \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+.$$

Daraus folgern wir die untere Grenze

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+ \leq \liminf_n \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+.$$

Jetzt wollen wir noch eine Abschätzung von der anderen Seite erhalten. Dafür sei $k \geq 1$ und $i \in \Lambda_n$.

Falls $i + B(k) \stackrel{\text{def}}{=} \{i' \in \mathbb{Z}^d \mid \exists j \in B(k) : i' = i + j\} \subset \Lambda_n$, liefert uns die Monotonie aus (5.12) zusammen mit der Translationsinvarianz,

$$\langle \sigma_i \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \leq \langle \sigma_i \rangle_{i+B(k), \beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{B(k), \beta, h}^+.$$

Falls andererseits $i + B(k) \not\subset \Lambda_n$ gilt, dann schneidet der Würfel $i + B(k)$ den Rand von Λ . Wegen dieses Zusammenhangs können wir die Anzahl der i mit dieser Eigenschaft durch die Anzahl aller Möglichkeiten einen Knoten aus $B(k)$ auszuwählen abschätzen. Multiplizieren wir das mit der Anzahl aller Möglichkeiten einen Knoten aus $|\partial^{\text{in}} \Lambda_n|$ auszuwählen, ergibt sich:

$$\sum_{\substack{i \in \Lambda_n: \\ i+B(k) \not\subset \Lambda_n}} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \leq 2B(k) |\partial^{\text{in}} \Lambda_n|,$$

dabei resultiert der Faktor 2 aus der Tatsache, dass wir negative Spins durch positive abschätzen wollen und der Abstand zwischen dem Wert -1 und dem Wert 1 genau 2 entspricht. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ &= \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{\substack{i \in \Lambda_n: \\ i+B(k) \subset \Lambda_n}} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ + \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{\substack{i \in \Lambda_n: \\ i+B(k) \not\subset \Lambda_n}} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \\ &\leq \langle \sigma_0 \rangle_{B(k), \beta, h}^+ + 2 \frac{|B(k)| |\partial^{\text{in}} \Lambda_n|}{|\Lambda_n|}, \end{aligned}$$

da $|\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+| \leq 1$. Zusammen mit der Van Hove-Konvergenz von Λ_n impliziert das für alle $k \geq 1$, $\limsup_n \langle m_{\Lambda_n} \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^+ \leq \langle \sigma_0 \rangle_{B(k), \beta, h}^+$. Nehmen wir auch gegen Grenzwert für $k \rightarrow \infty$, so erhalten wir $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{B(k), \beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$. Mit der unteren Grenze vom Anfang des Beweises erhalten wir die zu zeigende Aussage. \square

Bemerkung 6.6. Aus Korollar 3.7 wissen wir, dass $m^+(\beta, h)$ und $m(\beta, h)$ übereinstimmen, wenn $h \notin \mathfrak{B}_\beta$. Betrachten wir eine Folge $h \downarrow 0$ in \mathfrak{B}_β^c , dann folgt mit der obigen Proposition

$$m^*(\beta) = \lim_{h \downarrow 0} m(\beta, h) = \lim_{h \downarrow 0} m^+(\beta, h) = m^+(\beta, 0) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, 0}^+.$$

Lemma 6.7.

1. Für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $h \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$ monoton wachsend und rechtsseitig stetig, außerdem ist $h \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ monoton wachsend und linksseitig stetig.
2. Für alle $h \geq 0$ ist $\beta \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$ monoton wachsend und für alle $h \leq 0$ ist $\beta \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ monoton fallend.

Beweis. Wir werden den Beweis nur für $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$ durchführen. Durch Symmetrie können wir uns die jeweiligen Eigenschaften für $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ erschließen.

1. Sei $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$. Berechne

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial h} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \\
&= \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^+} \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} \omega_0 \mu_{\Lambda, \beta, h}^+(\omega) \right) \\
&= \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^+} \frac{\partial}{\partial h} \left(\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} \omega_0 e^{\beta \left(\sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}^f} \omega_i \omega_j + h \sum_{i \in \Lambda} \omega_i \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^+} \right) \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} \omega_0 e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}^{\#}(\omega)} \\
&= \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^+} \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} \omega_0 e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}^+(\omega)} \left(\beta \sum_{i \in \Lambda} \omega_i \right) - \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^+}{(\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^+)^2} \right) \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} \omega_0 e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda, h}^+(\omega)} \\
&\stackrel{*}{=} \beta \sum_{i \in \Lambda} \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} \omega_0 \omega_i \mu_{\Lambda, \beta, h}^+(\omega) - \beta \left(\sum_{i \in \Lambda} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \right) \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} \omega_0 \mu_{\Lambda, \beta, h}^+(\omega) \\
&= \beta \left(\sum_{i \in \Lambda} \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+(\omega) - \left(\sum_{i \in \Lambda} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \right) \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \right) \\
&= \beta \sum_{i \in \Lambda} \left(\langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ - \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+ \right),
\end{aligned}$$

wobei wir bei der mit * markierten Gleichheit folgende Rechnung benutzen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^+} \frac{\partial}{\partial h} \left(\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^+ \right) &= \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^+} \frac{\partial}{\partial h} \left(\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} e^{\beta \left(\sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}^f} \omega_i \omega_j + h \sum_{i \in \Lambda} \omega_i \right)} \right) \\
&= \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, \beta, h}^+} \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} \left(\beta \sum_{i \in \Lambda} \omega_i \right) e^{\beta \left(\sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}^f} \omega_i \omega_j + h \sum_{i \in \Lambda} \omega_i \right)} \\
&= \beta \sum_{i \in \Lambda} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda, \beta, h}^+.
\end{aligned}$$

□

Definition der kritischen inversen Temperatur

Durch Symmetrie gilt die Gleichung $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, 0}^- = -\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, 0}^+$, wenden wir zusätzlich Satz 6.4 und Bemerkung 6.6 an, erhalten wir für $h = 0$ die Aussage, dass die Eindeutigkeit der Gibbs-Zustände äquivalent zu der Gleichung $m^*(\beta) = 0$ ist. Lemma 6.7 sagt außerdem, dass $m^*(\beta) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, 0}^+$ monoton in β ist und damit ergibt sich folgende Definition.

Definition 6.8. Die *kritische inverse Temperatur* ist definiert durch

$$\beta_c(d) = \inf\{\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0} : m^*(\beta) > 0\} = \sup\{\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0} : m^*(\beta) = 0\}.$$

Hierbei ist $\beta_c(d)$ ein eindeutiger Wert von β , sodass für $\beta > \beta_c$ die Gleichung $m^*(\beta) = 0$ und für $\beta < \beta_c$ die Ungleichung $m^*(\beta) > 0$ gilt. Es muss natürlich noch

untersucht werden, ob β_c auch nicht-triviale Werte annimmt, beziehungsweise ob $0 < \beta_c(d) < \infty$ gilt. Das wird in den Abschnitten 6.2 und 6.3 nachgeholt.

6.1.2. Zusammenführung der beiden Kriterien für Eindeutigkeit

Der folgende Satz liefert die fehlende Verbindung zwischen den beiden Möglichkeiten einen Phasenübergang erster Ordnung zu definieren, die in den Definitionen 3.8 und 6.1 beschrieben wurden. Außerdem bietet der Satz sogar eine Erweiterung der Gleichung (3.12) auf die Werte, bei denen der Druck nicht differenzierbar ist. Bei diesen Fällen können wir auf die Konvexität des Drucks zurückgreifen, die zusammen mit dem Satz A.3 die Existenz der beiden einseitigen Ableitungen bezüglich h zusichert.

Satz 6.9. *Die folgenden Identitäten gelten für alle Werte $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $h \in \mathbb{R}$:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial h^+}(\beta, h) = m^+(\beta, h), \quad \frac{\partial \psi}{\partial h^-}(\beta, h) = m^-(\beta, h).$$

Zusätzlich gilt, dass $h \mapsto \psi(\beta, h)$ genau dann differenzierbar in h ist, wenn ein eindeutiger Gibbs-Zustand bei (β, h) existiert.

Bemerkung 6.10. *Der Satz 6.9 zeigt, dass der Druck bezüglich h nicht differenzierbar ist und zwar für genau die Werte (β, h) , bei denen ein eindeutiger Gibbs-Zustand existiert.*

Bemerkung 6.11. *Das Ising-Modell auf \mathbb{Z}^d ist bezüglich β sogar überall differenzierbar.*

Beweis. Rufen wir uns ins Gedächtnis zurück, dass die Menge \mathfrak{B}_β , die alle Werte von h enthält, an denen der Druck in h nicht differenzierbar ist, höchstens abzählbar ist. Daher ist es möglich für jedes $h \in \mathbb{R}$ eine Folge $h_k \downarrow h$ zu finden, sodass $h_k \notin \mathfrak{B}_\beta$ für jedes $k \geq 1$ gilt. Mit (3.13) folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial h^+}(\beta, h) = \lim_{h_k \downarrow h} m(\beta, h_k) = \lim_{h_k \downarrow h} m^+(\beta, h_k) = m^+(\beta, h),$$

da $m^+(\beta, h') = m(\beta, h')$ für alle $h \notin \mathfrak{B}_\beta$ (Korollar 3.7) gilt und $m^+(\beta, h)$ ist rechtsseitig stetig (Proposition 6.5) ist. Nun folgern wir mit Hilfe der Symmetrie

$$\frac{\partial \psi}{\partial h^-}(\beta, h) = -\frac{\partial \psi}{\partial h^+}(\beta, -h) = -m^+(\beta, -h) = m^-(\beta, h).$$

Also erhalten wir die folgende Äquivalenz

$$\frac{\partial \psi}{\partial h}(\beta, h) \text{ existiert} \Leftrightarrow m^+(\beta, h) = m^-(\beta, h).$$

Wenden wir nun noch Proposition 6.5 und Satz 6.4 an, so erhalten wir

$$m^+(\beta, h) = m^-(\beta, h) \Leftrightarrow \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+ \Leftrightarrow \text{Eindeutigkeit bei } (\beta, h)$$

und können daraus die zu zeigende Aussage folgern. \square

6.2. Spontane Symmetriebrechung bei niedrigen Temperaturen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass $\beta_c(d) < \infty$ für $d = 2$ erfüllt ist. Der Beweis für $d \geq 3$ verläuft analog und verwendet ebenfalls das Peierls Argument, jedoch wird für dessen Verallgemeinerung auf alle Dimensionen ein beträchtlicher Mehraufwand benötigt. Dafür verweisen wir auf den Beweis von Bonati in seinem Paper [2].

Sei $h = 0$ und $d = 2$. Um $\beta_c(d) < \infty$ nachzuweisen, ist es ausreichend zu zeigen, dass $\delta(\beta)$ nicht von Λ abhängt und

$$\mu_{\Lambda, \beta, 0}^+(\sigma_0 = -1) \leq \delta(\beta) \tag{6.2}$$

gilt, sodass $\delta(\beta) \downarrow 0$ für $\beta \rightarrow \infty$ erfüllt ist. Das hat zur Folge, dass

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda, \beta, 0}^+ &= \mu_{\Lambda, \beta, 0}^+(\sigma_0 = 1) \leq \delta(\beta) - \mu_{\Lambda, \beta, 0}^+(\sigma_0 = -1) \leq \delta(\beta) \\ &= 1 - 2\mu_{\Lambda, \beta, 0}^+(\sigma_0 = -1) \leq \delta(\beta) \\ &\geq 1 - 2\delta(\beta). \end{aligned}$$

Würden wir also β hinreichend groß wählen, sodass $1 - 2\delta(\beta) > 0$ ist, und dann den thermodynamischen Limes bilden, erhalten wir

$$m^*(\beta) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, 0}^+ > 0.$$

Benutzen wir zusätzlich die Definition 6.8, stellen wir fest, dass $\beta_c < \infty$ folgt und deswegen ein Phasenübergang bei niedrigen Temperaturen auftritt.

Betrachten wir das zweidimensionale Ising-Modell auf $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ mit $h = 0$ und einer konstant positiven Randbedingung. Sei außerdem $\omega \in \Omega_{\Lambda}^+$. Im nächsten Schritt werden wir die Energie-Funktion zu einer Darstellung umformen, welche die entgegengesetzte Ausrichtung zwei benachbarter Spins besonders hervorhebt:

$$\mathcal{H}_{\Lambda, \beta, 0} = -\beta \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}^f} \sigma_i \sigma_j = -\beta |\mathcal{E}_{\Lambda}^f| + \beta \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}^f} (1 - \sigma_i \sigma_j). \tag{6.3}$$

Zu jedem $i \in \mathbb{Z}^2$ betrachten wir das abgeschlossene Einheitsquadrat, das um i zentriert ist,

$$\mathcal{S}_i \stackrel{\text{def}}{=} i + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \subset \mathbb{R}^2. \tag{6.4}$$

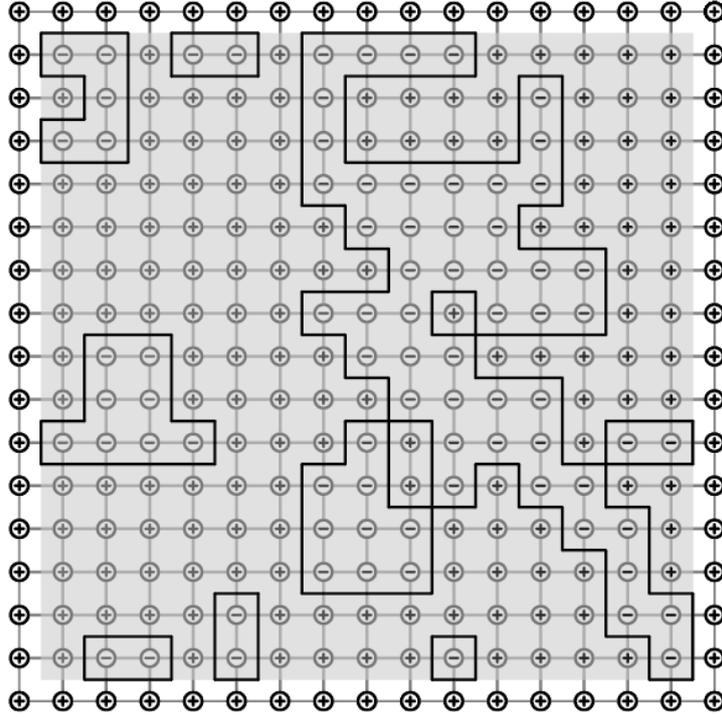


Abbildung 6.2.: Darstellung einer Konfiguration ω des zweidimensionalen Ising-Modells in einem endlichen Volumen Λ mit „+“ Randbedingung und der dazugehörigen Menge $\partial\mathcal{M}(\omega)$, Abbildung aus [3, S.110, Fig. 3.10]

Der Rand (im Sinne der Standardtopologie auf \mathbb{R}^2) von \mathcal{S}_i wird bezeichnet mit $\partial\mathcal{S}_i$. Diesen kann man als Kanten des um $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ verschobenen Gitters

$$\mathbb{Z}_*^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left\{ \left(i_1 + \frac{1}{2}, i_2 + \frac{1}{2}\right) \mid (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

auffassen. Wir bemerken hierbei, dass eine Kante des verschobenen Gitters genau eine Kante des Ursprünglichen schneidet. Somit können wir uns zu jeder Konfiguration $\omega \in \Omega_\Lambda^+$ die Menge

$$\mathcal{M}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \Lambda: \sigma_i(\omega) = -1} \mathcal{S}_i$$

definieren, sodass $\partial\mathcal{M}(\omega)$ aus den Kanten des verschobenen Gitters \mathbb{Z}_*^2 besteht. Zudem gilt die Aussage (siehe Abb. 6.2), *jede Kante aus \mathbb{Z}_*^2 trennt zwei entgegengesetzte benachbarte Spins: $\sigma_i(\omega) \neq \sigma_j(\omega)$* . Deswegen können wir die Gleichung (6.3) umformen zu:

$$\mathcal{H}_{\Lambda, \beta, 0}(\omega) = -\beta |\mathcal{E}_\Lambda^{\text{f}}| + \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^{\text{f}}} 1 - \omega_i \omega_j = -\beta |\mathcal{E}_\Lambda^{\text{f}}| + \sum_{\substack{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^{\text{f}} \\ \omega_i \neq \omega_j}} 2\beta = -\beta |\mathcal{E}_\Lambda^{\text{f}}| + 2\beta |\partial\mathcal{M}(\omega)|, \quad (6.5)$$

wobei $|\partial\mathcal{M}(\omega)|$ die Anzahl der Kanten ist, die in $\partial\mathcal{M}(\omega)$ enthalten sind. Wir wollen die Menge $\partial\mathcal{M}(\omega)$ in disjunkte geschlossene Wege oder auch disjunkte **Zyklen** zerlegen. Wie wir in Abbildung 6.2 aber sehen, ist das an den Knoten von \mathbb{Z}_*^2 an denen 4 Kanten von $\partial\mathcal{M}(\omega)$ zusammenlaufen nicht eindeutig möglich. Daher wenden wir an den betroffenen Stellen die folgende Verformungsregel an:

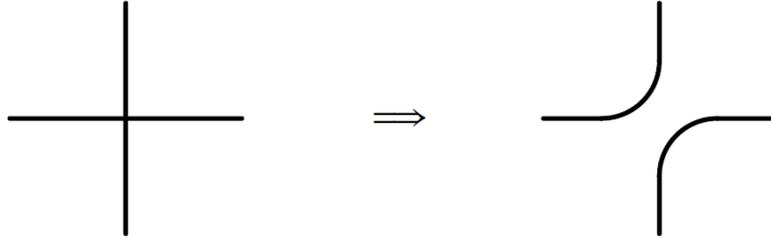


Abbildung 6.3.: Verformungsregel für 4 zusammenlaufende Kanten von $\partial\mathcal{M}(\omega)$, Abbildung aus [3, S.111, Fig. 3.11]

Dabei nehmen wir an, dass diese Verformung die Längen der Kanten von \mathbb{Z}_*^2 nicht verändert.

Wie wir in Abbildung 6.4 sehen, haben wir für $\partial\mathcal{M}(\omega)$ eine Zerlegung in n disjunkte Zyklen γ_i gefunden:

$$\partial\mathcal{M}(\omega) = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n.$$

Sei $\Gamma(\omega) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. Die Länge $|\gamma|$ eines Zyklus γ definieren wir durch die Anzahl der Kanten aus dem verschobenen Gitter \mathbb{Z}_*^2 . Zum Beispiel ist $|\gamma_1| = 12$ (siehe Abb. 6.4).

Benutzen wir die obigen Notationen und die Gleichung (6.5), können wir die Energie einer Konfiguration $\omega \in \Omega_\Lambda^+$ in Abhängigkeit ihrer Zyklen beschreiben:

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,0}^+(\omega) = -\beta |\mathcal{E}_\Lambda^f| + 2\beta \sum_{\gamma \in \Gamma(\omega)} |\gamma|.$$

Eine ähnliche Darstellung ergibt sich für die Zustandssumme:

$$\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,0}^+ = e^{\beta |\mathcal{E}_\Lambda^f|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta |\gamma|}, \quad (6.6)$$

dabei nimmt das Produkt den Wert 1 an, falls die Menge $\Gamma(\omega)$ leer ist. Mit diesen zwei Gleichungen können wir auch das Gibbs-Maß umschreiben zu:

$$\mu_{\Lambda,\beta,0}^+(\omega) = \frac{e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,0}^+(\omega)}}{\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,0}^+} = \frac{\prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta |\gamma|}}{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta |\gamma|}}. \quad (6.7)$$

Um an dieser Stelle im Beweis voran zu kommen, benutzen wir das *Peierls Argument*.

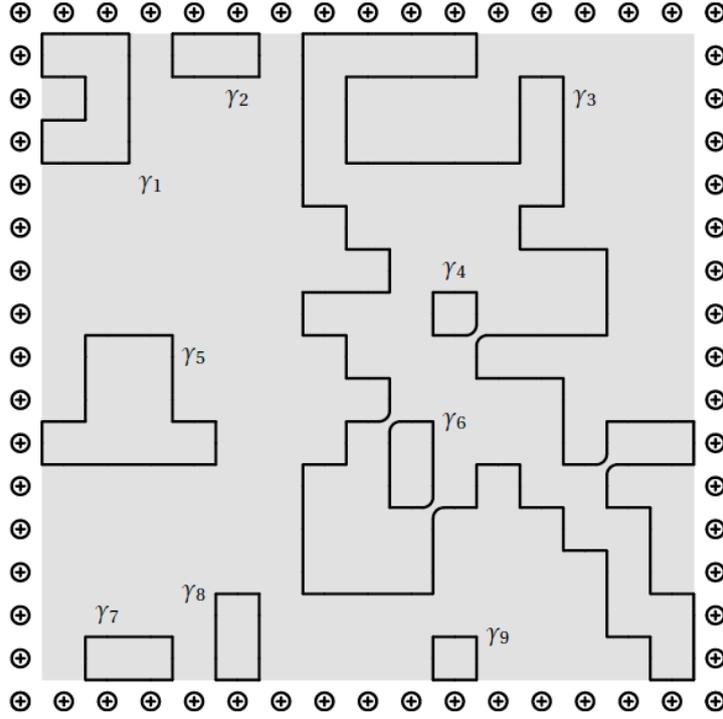


Abbildung 6.4.: Die Zyklen γ_i , die wir mit Hilfe der Verformungsregel erhalten haben, von der zugehörigen Konfiguration aus Abb. 6.2, Abbildung aus [3, S.112, Fig. 3.12]

Peierls Argument

Wir betrachten das Quadrat $B(n) = \{-n, \dots, n\}^2$. Um die Wahrscheinlichkeit $\mu_{B(n),\beta,0}^+(\sigma_0 = -1)$ besser zu verstehen, machen wir uns bewusst, dass jede Konfiguration $\omega \in \Omega_{B(n)}^+$ mit der Eigenschaft $\sigma_0(\omega) = -1$ **mindestens einen Zyklus** (um genau zu sein, eine ungerade Anzahl von Zyklen) besitzen muss, der den Ursprung umgibt.

Um das formal etwas genauer zu fassen, bemerken wir, dass jeder Zyklus $\gamma \in \Gamma(\omega)$ in \mathbb{R}^2 zusätzlich beschränkt ist und somit den Raum \mathbb{R}^2 in zwei Bereiche unterteilt. Einer der zwei ist das Innere des Zyklus, das wir als $\text{Int}(\gamma)$ (wegen des englischen „interior“) bezeichnen. Deswegen können wir schreiben:

$$\mu_{B(n),\beta,0}^+(\sigma_0 = -1) \leq \mu_{B(n),\beta,0}^+(\exists \gamma_* \in \Gamma : \text{Int}(\gamma_*) \ni 0) \leq \sum_{\gamma_* : \text{Int}(\gamma_*) \ni 0} \mu_{B(n),\beta,0}^+(\Gamma \ni \gamma_*).$$

Lemma 6.12. *Für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und jeden Zyklus γ_* gilt*

$$\mu_{B(n),\beta,0}^+(\Gamma \ni \gamma_*) \leq e^{-2\beta|\gamma_*|}. \quad (6.8)$$

Die Abschätzung (6.8) zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Auftreten eines bestimmten Zyklus geringer wird, sobald β zu groß oder der Zyklus zu lang wird.

Beweis. Aus (6.7) folgern wir

$$\begin{aligned} \mu_{B(n),\beta,0}^+(\Gamma \ni \gamma_*) &= \sum_{\substack{\omega \in \Omega_{B(n)}^+ \\ \Gamma(\omega) \ni \gamma_*}} \mu_{B(n),\beta,0}^+(\omega) \\ &= e^{-2\beta|\gamma_*|} \frac{\sum_{\omega: \Gamma(\omega) \ni \gamma_*} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega) \setminus \{\gamma_*\}} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\omega} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta|\gamma|}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Jetzt werden wir zeigen, dass die Gleichung (6.9) von oben durch $e^{-2\beta|\gamma_*|}$ beschränkt ist, indem wir folgern, dass der Nenner größer gleich dem Zähler ist. Dafür definieren wir uns zu jeder Konfiguration ω mit der Eigenschaft $\Gamma(\omega) \ni \gamma_*$, die dazugehörige Konfiguration $\hat{\omega}(\gamma_*)$, die wir beim „Entfernen von γ_* “ bzw. dem Umdrehen aller Spins innerhalb von γ_* erhalten:

$$(\hat{\omega}(\gamma_*))_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\omega_i & i \in \text{Int}(\gamma_*), \\ \omega_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine wichtige Beobachtung ist, dass die Menge aller Zyklen von $\hat{\omega}(\gamma_*)$ genau $\Gamma(\gamma_*) \setminus \{\gamma_*\}$ entspricht, selbst wenn ein Zyklus andere Zyklen enthält. Zudem sei $\hat{\Omega}(\gamma_*)$ die Menge der Konfigurationen, die durch das Entfernen von γ_* aus einer Konfiguration, die γ_* noch enthielt, gewonnen wurde. Wir folgern

$$\sum_{\omega: \Gamma(\omega) \ni \gamma_*} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega) \setminus \{\gamma_*\}} e^{-2\beta|\gamma|} = \sum_{\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(\gamma_*)} \prod_{\gamma' \in \Gamma(\hat{\omega})} e^{-2\beta|\gamma'|}.$$

Da an die Menge $\hat{\Omega}(\gamma_*)$ zusätzliche Einschränkungen, im Gegensatz zu der Menge $\Omega_{B(n)}^+$, gestellt sind, können wir folgern, dass die Summe über $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(\gamma_*)$ kleiner als die Summe über alle $\omega \in \Omega_{B(n)}^+$ ist. Damit erhalten wir:

$$\mu_{B(n),\beta,0}^+(\Gamma \ni \gamma_*) = e^{-2\beta|\gamma_*|} \frac{\sum_{\omega: \Gamma(\omega) \ni \gamma_*} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega) \setminus \{\gamma_*\}} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\omega} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta|\gamma|}} \leq e^{-2\beta|\gamma_*|}.$$

□

Bemerkung 6.13. *Die Operation, dass wir alle Spins innerhalb eines Zyklus umgedreht haben, ist nur möglich, da wir die Symmetrie-Eigenschaft des Ising-Modells bei $h = 0$ ausgenutzt haben (siehe 2.2 und 2.8).*

Wir benutzen die eben bewiesene Ungleichung (6.8), um die Summe über alle Zyklen, die den Ursprung umgeben, abzuschätzen. Der kleinste Zyklus mit dieser

Eigenschaft besitzt eine Länge von 4, somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu_{B(n),\beta,0}^+(\sigma_0 = -1) &= \sum_{\gamma_*: \text{Int}(\gamma_*) \ni 0} e^{-2\beta|\gamma_*|} \\ &= \sum_{k \geq 4} \sum_{\substack{\gamma_*: \text{Int}(\gamma_*) \ni 0 \\ |\gamma_*| = k}} e^{-2\beta|\gamma_*|} \\ &= \sum_{k \geq 4} e^{-2\beta|k|} \# \{ \gamma_* \mid \text{Int}(\gamma_*) \ni 0, |\gamma_*| = k \},\end{aligned}$$

wobei $\#$ die Anzahl der Elemente einer Menge angibt.

Jetzt wollen wir uns überlegen, wie viele solcher γ_* es gibt. Ein Zyklus der Länge k , der den Ursprung umgibt, muss zwangsläufig einen Knoten aus der Menge $\{(u - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \mid u = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ enthalten.⁷ Jedoch ist die Anzahl der Zyklen der Länge k beginnend von einem bestimmten Knoten maximal $4 \cdot 3^{k-1}$, da bei der ersten Kante 4 Möglichkeiten zu Verfügung stehen, aber für die restlichen $k-1$ Kanten nur noch 3 Möglichkeiten existieren, weil eine Kante nicht doppelt verwendet werden kann. Deswegen ergibt sich die Abschätzung

$$\# \{ \gamma_* : \text{Int}(\gamma_*) \ni 0, |\gamma_*| = k \} \leq \frac{k}{2} \cdot 4 \cdot 3^{k-1}.$$

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so erhalten wir

$$\mu_{B(n),\beta,0}^+(\sigma_0 = -1) \leq \frac{2}{3} \sum_{k \geq 4} k 3^k e^{-2\beta k} \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\beta). \quad (6.10)$$

Wenn β genügend groß ist, sodass $3e^{-2\beta} < 1$ erfüllt ist, folgt daraus die Konvergenz der Reihe in (6.10). Außerdem gilt $\delta(\beta) \downarrow 0$ für $\beta \rightarrow \infty$. Letztendlich folgt (6.2) und damit auch $\beta_c(2) < \infty$.

6.3. Spontane Symmetriebrechung bei hohen Temperaturen

In diesem Kapitel werden nur einen Ansatz geben, um $\beta_c(d) > 0$ für alle $d \geq 1$ zu beweisen. Ähnlich wie bei dem Beweis im letzten Kapitel werden wir die Energiefunktion und die Zustandssumme umschreiben, sodass wir bei kleinem β nützliche Folgerungen ableiten können.

Weil $\sigma_i \sigma_j$ nur die beiden Werte $+1$ und -1 annehmen kann, erkennen wir, dass deshalb die folgende Identität gilt:

$$e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = \cosh(\beta) + \sigma_i \sigma_j \sinh(\beta) = \cosh(\beta) (1 + \tanh(\beta) \sigma_i \sigma_j).$$

⁷ $\lfloor x \rfloor$ entspricht der größten ganzzahligen Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Deswegen gilt für jedes $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ und $\omega \in \Omega_\Lambda^+$,

$$e^{-\beta \mathcal{H}_{\Lambda,0}(\omega)} = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^f} e^{\beta \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega)} = \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^f|} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^f} (1 + \tanh(\beta) \omega_i \omega_j). \quad (6.11)$$

Lemma 6.14. *Für eine nicht leere, endliche Menge \mathcal{E} gilt*

$$\prod_{e \in \mathcal{E}} (1 + f(e)) = \sum_{E \subset \mathcal{E}} \prod_{e \in E} f(e). \quad (6.12)$$

Dabei gilt falls das Produkt leer ist, entspricht es dem Wert 1.

Da die Beweismethode der vollständigen Induktion angewendet wird, ist der Beweis rein technisch und wird deswegen im Anhang unter „Beweise“ zu finden sein.

Setzen wir (6.12) in (6.11) ein und tauschen die Reihenfolge der Summen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,0}^+ &= \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^f|} \sum_{E \subset \mathcal{E}_\Lambda^f} \prod_{\{i,j\} \in E} \tanh(\beta) \omega_i \omega_j \\ &= \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^f|} \sum_{E \subset \mathcal{E}_\Lambda^f} \tanh(\beta)^{|E|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\{i,j\} \in E} \omega_i \omega_j. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Das Produkt über $\{i, j\} \in E$, sortieren wir um, sodass wir ein Produkt über alle $i \in \Lambda$ erhalten und benutzen danach den Fakt, dass man die Summe und das Produkt tauschen kann, wenn man die Summe über $\omega \in \Omega_\Lambda^+$ in einzelne Summen über $\omega_i = \pm 1$ aufteilt:

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\{i,j\} \in E} \omega_i \omega_j = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{N(i,E)} = \prod_{i \in \Lambda} \sum_{\omega_i = \pm 1} \omega_i^{N(i,E)}, \quad (6.14)$$

wobei $N(i, E)$ die Nachbarschaftszahl⁸ ist: $N(i, E) = \#\{j \in \mathbb{Z}^d \mid \{i, j\} \in E\}$. Wir betrachten die innere Summe der Gleichung (6.14) etwas genauer und stellen fest:

$$\sum_{\omega_i = \pm 1} \omega_i^{N(i,E)} = \begin{cases} 2 & \text{wenn } N(i, E) \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgern wir:

$$\prod_{i \in \Lambda} \sum_{\omega_i = \pm 1} \omega_i^{N(i,E)} = \begin{cases} 2^{|\Lambda|} & \text{wenn } N(i, E) \text{ gerade ist für alle } i \in \Lambda, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.15)$$

⁸Die Nachbarschaftszahl $N(i, E)$ gibt tatsächlich Anzahl der Nachbarn des Knotens i bezüglich der Kantenmenge E an.

Setzen wir (6.15) und (6.14) in die Gleichung (6.13) ein, erhalten wir die Hochtemperaturentwicklung der Zustandssumme:

$$\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta,0}^+ = 2^{|\Lambda|} \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_{\Lambda}^f|} \sum_{E \in \mathfrak{E}_{\Lambda}^{+, \text{gerade}}} \tanh(\beta)^{|E|},$$

dabei ist

$$\mathfrak{E}_{\Lambda}^{+, \text{gerade}} \stackrel{\text{def}}{=} \{E \subset \mathcal{E}_{\Lambda}^f \mid N(i, E) \text{ ist gerade für alle } i \in \Lambda\}.$$

Mit Hilfe dieser Entwicklung ist es möglich eine ähnliche Darstellung für $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda,\beta,0}^+$ zu finden. Diese Darstellung kann dann von beiden Seiten abgeschätzt werden, sodass man die gewünschte Aussage $\beta_c(d) > 0$ über die kritische inverse Temperatur erhält.

A. Anhang

A.1. Sätze

Lemma A.1. (Höldersche Ungleichung). Für alle $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $p, q > 1$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}. \quad (\text{A.1})$$

Wir bezeichnen eine Doppelfolge $(a_{m,n})_{m,n \geq 1}$ als **monoton wachsend**, wenn

$$m \leq m', n \leq n' \Rightarrow a_{m,n} \leq a_{m',n'}$$

und **monoton fallend**, wenn $(-a_{m,n})_{m,n \geq 1}$ monoton wachsend ist. Außerdem nennen wir eine Doppelfolge **von oben beschränkt** (bzw. **von unten beschränkt**), wenn eine Schranke $C < \infty$ existiert, sodass $a_{m,n} \leq C$ (bzw. $a_{m,n} \geq -C$) für alle $m, n \geq 1$ erfüllt ist.

Lemma A.2. $(a_{m,n})_{m,n \geq 1}$ sei eine monoton wachsende und von oben beschränkte Doppelfolge. Dann folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{m,n} = \sup\{a_{m,n} : m, n \geq 1\}. \quad (\text{A.2})$$

Die **einseitigen Ableitungen** einer beliebigen Funktion f seien definiert durch

$$\partial^+ f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^+} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \downarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \quad (\text{A.3})$$

$$\partial^- f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^-} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \uparrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \quad (\text{A.4})$$

Diese sind für konvexe Funktionen immer wohldefiniert und erfüllen darüber hinaus noch die folgenden Eigenschaften:

Satz A.3. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gelten

1. $\partial^+ f(x)$ und $\partial^- f(x)$ existieren an allen Punkten $x \in I$.
2. $\partial^- f(x) \leq \partial^+ f(x)$, für alle $x \in I$.
3. $\partial^+ f(y) \leq \partial^- f(y)$, für alle $x < y$ in I .
4. $\partial^+ f$ und $\partial^- f$ sind monoton steigend.
5. $\partial^+ f$ ist rechtsseitig stetig, $\partial^- f$ ist linksseitig stetig.
6. $\{x : \partial^+ f(x) \neq \partial^- f(x)\}$ ist höchstens abzählbar.
7. Sei $(g_n)_{n \geq 1}$ eine Folge konvexer Funktionen von I nach \mathbb{R} , die punktweise gegen eine Funktion g konvergieren. Wenn g am Punkt x differenzierbar ist, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^+ g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial^- g_n(x) = g'(x)$.

Der Beweis ist im Anhang des Buches von Velenik [3, S. 482-484] zu finden.

A.2. Beweise

Aus dem Kapitel 4 „Das eindimensionale Ising-Modell“ muss noch die Gleichung (4.2) bewiesen werden:

$$\operatorname{tr}(A^n) = \sum_{i_0=1}^2 \cdots \sum_{i_{n-1}=1}^2 \prod_{k=0}^{n-1} A_{i_k i_{k+1}}.$$

Beweis. A sei eine reelle 2×2 Matrix. Bevor wir uns dem eigentlichen Beweis widmen, zeigen wir zunächst die Gleichung

$$(A^n)_{jk} = \sum_{i_0=1}^2 \cdots \sum_{i_{n-2}=1}^2 A_{ji_0} \left(\prod_{m=0}^{n-3} A_{i_m i_{m+1}} \right) A_{i_{n-2}k}, \quad (\text{A.5})$$

für alle $n \geq 2$.

Vollständige Induktion über n

Der Induktionsanfang ist für $n = 2$ durch zu führen, deswegen überprüfen wir

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_{11}A_{11} + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{21}A_{12} + A_{22}A_{22} \end{pmatrix}. \quad \checkmark$$

Wegen des Induktionsanfangs können wir die Induktionsvoraussetzung (kurz: IV) annehmen. Diese besagt, dass für mindestens ein $n' \in \mathbb{N}$ die Gleichung (A.5) gelte. Nun müssen wir daraus die Gültigkeit der zu zeigenden Gleichung für $n = n' + 1$

folgern.

$$\begin{aligned}
(A^{n'+1})_{jk} &= (A^{n'} \cdot A)_{jk} \\
&= \sum_{i'=1}^2 (A^{n'})_{ji'} \cdot A_{i'k} \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} \sum_{i'=1}^2 \left(\sum_{i_0=1}^2 \cdots \sum_{i_{n'-1}=1}^2 A_{ji_0} \left(\prod_{m=0}^{n'-3} A_{i_m i_{m+1}} \right) A_{i_{n'-1} i'} \right) A_{i'k} \\
&= \sum_{i_0=1}^2 \cdots \sum_{i_{n'-1}=1}^2 \sum_{i'=1}^2 A_{ji_0} \left(\prod_{m=0}^{n'-3} A_{i_m i_{m+1}} \right) A_{i_{n'-1} i'} A_{i'k}
\end{aligned}$$

Benennen wir den Index i' zu $i_{n'}$ um und erweitern das Produkt bis $m = n' - 1$, so erhalten wir (A.5) für $n = n' + 1$. Daraus folgt die Gleichung (A.5) für jedes $n \geq 2$ und somit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Mit der Gleichung (A.5) können wir, für $i_n = i_0$, folgende Darstellung für die Spur erhalten:

$$\text{tr}(A^n) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i_0=1}^2 \cdots \sum_{i_{n-3}=1}^2 A_{ji_0} \left(\prod_{m=0}^{n-2} A_{i_m i_{m+1}} \right) A_{i_{n-1} j} = \sum_{i_0=1}^2 \cdots \sum_{i_{n-1}=1}^2 \left(\prod_{m=0}^{n-1} A_{i_m i_{m+1}} \right). \quad (\text{A.6})$$

Das zeigt die Gleichung (4.2). □

Zudem muss ein Beweis aus dem Abschnitt 6.3 „Spontane Symmetriebrechung bei hohen Temperaturen“ nachgeholt werden. Zu zeigen ist, dass die Gleichung (6.12)

$$\prod_{e \in \mathcal{E}} (1 + f(e)) = \sum_{E \subset \mathcal{E}} \prod_{e \in E} f(e), \quad (\text{A.7})$$

für jede nicht leere, endliche Menge \mathcal{E} erfüllt ist.

Sei $n = |\mathcal{E}|$ und $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$

Vollständige Induktion über n

Beweis. Überprüfe die Gleichung (A.7) für ein $n \in \mathbb{N}$. Führe den Induktionsanfang für $n = 1$ durch:

$$\prod_{e \in \{e_1\}} (1 + f(e)) = 1 + f(e_1) = \sum_{E \subset \{e_1\}} \prod_{e \in E} f(e) \quad \checkmark$$

Wegen des Induktionsanfangs können wir die Induktionsvoraussetzung (kurz: IV) annehmen. Diese besagt, dass für mindestens ein $m \in \mathbb{N}$ die Gleichung (A.7) gelte. Nun müssen wir daraus die Gültigkeit der zu zeigenden Gleichung für $n = m + 1$

folgern.

Sei $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{m+1}\}$.

$$\begin{aligned}
\prod_{e \in \mathcal{E}} (1 + f(e)) &= (1 + f(e_{m+1})) \cdot \prod_{e \in \mathcal{E} \setminus \{e_{m+1}\}} (1 + f(e)) \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} (1 + f(e_{m+1})) \cdot \left(\sum_{E \subset \mathcal{E} \setminus \{e_{m+1}\}} \prod_{e \in E} f(e) \right) \\
&= \sum_{E \subset \mathcal{E} \setminus \{e_{m+1}\}} \prod_{e \in E} f(e) + \sum_{E \subset \mathcal{E} \setminus \{e_{m+1}\}} \prod_{e \in E} f(e) f(e_{m+1}) \\
&= \sum_{\substack{E \subset \mathcal{E}: \\ e_{m+1} \notin E}} \prod_{e \in E} f(e) + \sum_{\substack{E \subset \mathcal{E}: \\ e_{m+1} \in E}} \prod_{e \in E} f(e) \\
&= \sum_{E \subset \mathcal{E}} \prod_{e \in E} f(e)
\end{aligned}$$

Das zeigt die Gleichung (A.7) für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Literaturverzeichnis

- [1] R.J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Dover books on physics. Dover Publications, 2007. ISBN 978-0-486-46271-4.
- [2] Claudio Bonati. The peierls argument for higher dimensional ising models. *European Journal of Physics*, 35(3):035002, 2014. URL <http://stacks.iop.org/0143-0807/35/i=3/a=035002>.
- [3] Sacha Friedli and Yvan Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction*. Cambridge University Press, 2017. ISBN 978-1-107-18482-4. doi: 10.1017/9781316882603.
- [4] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31: 253–258, February 1925. doi: 10.1007/BF02980577.
- [5] Matthias Löwe. Mathematische statistische mechanik. Vorlesungsskript. URL <https://www.uni-muenster.de/Stochastik/loewe/mathstatmechanik.pdf>.
- [6] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65:117–149, Feb 1944. doi: 10.1103/PhysRev.65.117. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.65.117>.
- [7] Daniel F. Styer. What good is the thermodynamic limit? *American Journal of Physics*, 72(1):25–29, 2004. doi: 10.1119/1.1621028. URL <https://doi.org/10.1119/1.1621028>.
- [8] Y. Yamamoto, K. Aihara, T. Leleu, K.-i. Kawarabayashi, S. Kako, M. Fejer, K. Inoue, and H. Takesue. Coherent Ising machines – optical neural networks operating at the quantum limit. *npj Quantum Information*, 3:49, December 2017. doi: 10.1038/s41534-017-0048-9.

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommene Stellen habe ich unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht.

Potsdam, 28.08.2018
Ort, Datum

Unterzeichner