

UNIVERSITÄT POTSDAM

MATHEMATISCH NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT

INSTITUT FÜR PHYSIK UND ASTRONOMIE

Nichtlineare Beeinflussung zweier Orgelpfeifen: Auswertung von Messung im Hinblick auf Synchronisationseffekte

BACHELORARBEIT

von

JULIAN STÄHLE

betreut durch

PRIV. DOZ. MARKUS ABEL

Zweitgutachter:

PROF. DR. ROLF BADER
(UNI HAMBURG)



22. März 2021

Erklärung

Ich erkläre eidesstattlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den benutzten Quellen entnommenen Stellen als solche gekennzeichnet habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Potsdam, 22. März 2021 _____ [Matrikel Nr. 790548]
Julian Stähle

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Fragestellung ob und wann sich Synchronisation zweier Wellen wiederkehrend einstellt, wenn man den Abstand der Quellen variiert. Weiterhin befasst sie sich mit dem dafür nötigen theoretischen Hintergrund, dem Aufbau des Experimentes und den Methoden der Messungen sowie der Auswertung der aufgenommenen Daten.

Mit einer ähnlichen Fragestellung hatte sich schon Fischer [10] beschäftigt. Dort wurde unter anderem untersucht, wie zwei Orgelpfeifen sich zueinander verhalten, wenn man eine der beiden in vertikaler und horizontaler Richtung verschiebt. Man stellte fest, dass sich ein wiederkehrendes Muster im Schalldruckpegel erkennen lässt. Ich beschäftige mich in dieser Arbeit mit der Frage, warum sich diese festgestellten Sprünge ereignen und wo genau sie stattfinden. Dafür darf ich die damals aufgenommenen Daten aus [10] verwenden und auswerten. Die Ergebnisse dieser Arbeit bestätigen die Annahme aus [10], dass sich die Pfeifen nach $0.5 \cdot n \cdot l / \lambda$, $n \in \mathbb{N}$ Metern neu synchronisieren.

Inhaltsverzeichnis

Erklärung	i
Zusammenfassung	ii
Inhaltsverzeichnis	iii
1 Einleitung	1
2 Theoretischer Hintergrund	3
2.1 Einzelne Orgelpfeife als Oszillator	3
2.2 System von zwei Orgelpfeifen	4
2.3 Signalverarbeitung	6
3 Aufbau- und Messmethoden des Experimentes	9
3.1 Messaufbau	9
3.2 Stimmung der Pfeifen	11
3.3 Messmethoden	11
4 Auswertung	13
4.1 Signalverarbeitung	13
4.2 Erste horizontale Aufnahmereihe	15
4.3 Erste vertikale Aufnahmereihe	20
4.4 2D Projektion des Messfeldes	20
4.5 Vergleich mit anderen Frequenzen	21
5 Ergebnisse und Diskussion	23
5.1 Erste horizontale Verschiebung	23
5.2 Vertikale Verschiebung	24
5.3 SPL Spektrum für alle horizontalen und vertikalen Messreihen	25
5.4 Fehlerbetrachtung	25
5.5 Fazit	25
Anhang	27
Zwei gekoppelte Oszillatoren	27
Quellcode des Auswertprogramms	31

Literaturverzeichnis

33

1 Einleitung

In der Natur gibt es viele Phänomene die sich mit linearen Gleichungen nicht beschreiben lassen. Es treten sogenannte nichtlineare Effekte auf. Einer dieser Effekte ist Synchronisation.

Ein bekanntes Beispiel ist der Herzschrittmacher. Dieses elektronische Gerät kompensiert Unregelmäßigkeiten des Herzschlages, indem es den Herzrhythmus anpasst. Zuguterletzt finden wir Synchronisationen auch bei anderen Lebewesen. Wenn Grillen andere Grillen zirpen hören, passen sie sich dem Rhythmus dem Kollektiv an. Für diese und weitere Beispiele und Erläuterungen sei auf [17] verwiesen.

Wie man sieht, spielt Synchronisation eine wesentliche Rolle in unserem Leben. Deshalb bieten Forschungsarbeiten, die sich mit diesen Themen beschäftigen, sehr viel Bezug zur Realität und können auch praktisch angewendet werden. Weiterhin lassen sich Ergebnisse dieser Arbeit auf andere Felder der Physik anwenden, da Synchronisation wie oben beschrieben, in elektrischen Stromkreisen, Optik und anderen Feldern der Physik auftritt.

In dieser Arbeit wird der Effekt am Beispiel von Orgelpfeifen untersucht. Wie in Fischer [10] und Abel et al. [2] schon festgestellt wurde, treten dort ebenfalls nichtlineare Effekte auf. Grundlage für diese Arbeit ist die Dissertation von Fischer [10]. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Auswertung der damals aufgenommenen Daten. Um diese jedoch auch qualitativ besser zu verstehen, wird zuerst der theoretischen Hintergrund beleuchtet [Kapitel 2], der notwendig ist um die aufgenommenen Daten zu verstehen und auszuwerten. Dabei wird näher auf die Tonerzeugung einer Pfeife, sowie auf die Signalverarbeitung und die Auswertung von Messungen mit Python eingegangen. Danach widmet sich die Arbeit dem Aufbau des Experimentes [Kapitel 3] sowie den Messmethoden, die gemacht wurden, um die Daten aufzunehmen. Im Anschluss daran werden die aufgenommenen Daten ausgewertet [Kapitel 4]. Als letztes werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst [Kapitel 5].

2 Theoretischer Hintergrund

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Klangerzeugung einer Orgelpfeife und seiner Beschreibung mithilfe eines nichtlinearen Oszillatormodells. Desweiteren wird erklärt, wie die von einer Pfeife emittierte Schallwelle zur Synchronisation der jeweils anderen führt. Weiterhin werden Methoden der Signalverarbeitung beschrieben, die für die Auswertung der Daten gebraucht werden. Als erstes wird die Klangerzeugung einer einzelnen Orgelpfeife erläutert. Dies wurde zum Beispiel schon von Lord Rayleigh um 1882 [18] untersucht. Auch in den letzten Jahrzehnten wurde das Thema mehrfach aufgegriffen, wie zum Beispiel in [11] oder auch [7].

Danach befasse ich mich mit dem System von zwei Orgelpfeifen sowie mit einigen Methoden der Signalverarbeitung, die im Folgenden für die Auswertung der Daten wichtig sind.

2.1 Einzelne Orgelpfeife als Oszillator

Eine Orgelpfeife bekommt Energie durch Luftzufuhr über den Pfeifenfuß [1]. Dadurch wird die Luft im Resonator der Pfeife zum Schwingen angeregt [1]. Es entstehen turbulente Verwirbelungen [1]. Sobald diese Verwirbelungen am Pfeifenmund geteilt werden, breiten sich diese als charakteristische Wellen im Raum aus [8]. Durch das entstandene „Luftblatt“, auch Jet genannt, können externe akustische Felder mit dem Resonator nichtlinear interagieren [22] [1]. Weiterhin kann durch viskose Dämpfung Energie-dissipation im Resonator auftreten [19].

Die generelle Dissipation in bewegter Luft wird im Rahmen der Navier-Stokes-Gleichung beschrieben [16]. Aus dieser lässt sich die Wellengleichung für akustische Wellen herleiten [12]. Die Geschwindigkeit der Welle hängt dabei von thermodynamischen Grundgrößen wie Druck und Temperatur ab [12]. Dadurch können unterschiedliche Geschwindigkeiten in der Pfeife und außerhalb der Pfeife entstehen. Dieses Phänomen ist durch die durch Reibung entstandene Wärme innerhalb der Pfeife und die erwähnte Energie-dissipation zu erklären [5].

Schwingungen

Ein schwingendes System wird durch eine Differentialgleichung beschrieben [5]. Ein prominentes Beispiel ist der harmonische Oszillator:

$$0 = \ddot{x} + \omega_0^2 x \quad \text{Harmonischer Oszillator} \quad (2.1)$$

[17]. Es gibt allerdings noch weitere Oszillatorgleichungen. Diese haben dieselbe Form wie die des harmonischen Oszillators, können aber noch andere oder abgeänderte Terme enthalten. Ein Beispiel dafür ist der Van-der-Pol Oszillator 2.2. Dieser enthält den nichtlinearen Term $\dot{x}x^2$, der dafür sorgt, dass die Amplitude frequenzabhängig ist [19].

$$0 = \ddot{x} - \dot{x}(1 - x^2) + \omega_0^2 x \quad \text{Van-der Pol Oszillator} \quad (2.2)$$

Wellen

Wellen bewegen sich nach der Wellengleichung [6]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \quad (2.3)$$

Dabei ist Δ der Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ in kartesischen Koordinaten. $u(t,x,y,z)$ ist eine beliebige Funktion für die Amplitude, die Zeit und Ortsabhängig ist. [9] Wellen entstehen durch die räumliche Ausbreitung von Schwingungen [5]. Sobald die Schwingungen den Resonator der Pfeife verlassen, bewegen sie sich als Wellen durch den Raum. Dadurch interagieren sie mit den Wellen der jeweils anderen Pfeife. Sie beeinflussen sich gegenseitig in genügend nahem Abstand.

Frequenz und Wellenlänge einer Welle hängen über die Formel

$$c = \lambda \cdot f \quad (2.4)$$

zusammen [5]. In der Gleichung steht λ für die Wellenlänge und f für die Frequenz der Schwingung. Weiterhin ist c in diesem Fall die Schallgeschwindigkeit, die sich aus der umgebenden Lufttemperatur über

$$c = 331.5 + 0.6 \cdot \Theta \quad (2.5)$$

ergibt [4]. Θ ist hierbei die Raumtemperatur in Grad Celsius. Diese Formel ist allerdings nur eine Näherung, die für Temperaturen zwischen -40 bis 90 Grad Celsius gilt [4].

2.2 System von zwei Orgelpfeifen

Das System von zwei Pfeifen wurde schon in anderen Arbeiten, wie zum Beispiel in [1], [2], [19], untersucht. Aus den genannten Quellen geht hervor, dass es sinnvoll ist dieses System mit zwei Van-der-Pol Oszillatoren zu modellieren. Man beobachtet eine Abhängigkeit zwischen Frequenz und Amplitude, die sich mit dem harmonischen Oszillator nicht beschreiben lässt.

System von zwei Van der Pol Oszillatoren

Die folgende Rechnung findet der Leser vollständig im Anhang. Um das beobachtete System zu charakterisieren, benutzt man zwei nichtlineare, gekoppelte Van-der-Pol-Oszillatoren.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= f_{vdp}(x_0, \dot{x}_0) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) \\ \ddot{x}_1 &= f_{vdp}(x_1, \dot{x}_1) + c(\dot{x}_0 - \dot{x}_1)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Dabei ist f_{vdp} die Gleichung für einen Van-der-Pol-Oszillator 2.2 und c eine Kopplungskonstante. Man geht nun so vor, wie in [17] beschrieben. Man setzt die Van-der-Pol-Gleichung in die obige Formel ein und benennt die Parameter um. Danach überführt man die jeweilige Gleichung zweiter Ordnung 2.6 in ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung und erhält:

$$\dot{x}_0 \begin{cases} \dot{x}_0 = y_0 \\ \dot{y}_0 = -\omega_0^2 x_0 + ay_0 - by_0 x_0^2 + cy_1 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -\omega_0^2 x_1 + ay_1 - by_1 x_0^2 + cy_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Nachfolgend beschränke ich mich an dieser Stelle auf das Gleichungssystem 2.7. Für das Gleichungssystem 2.8 sind die Schritte analog. Man wählt folgenden komplexen Ansatz wie in [17]:

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{2} \left(A_0 e^{i\omega t} + A_0^* e^{-i\omega t} \right) \\ y_0 &= \frac{1}{2} \left(i\omega A_0 e^{i\omega t} + i\omega A_0^* e^{-i\omega t} \right)\end{aligned}\quad (2.9)$$

Gleichung 2.9 setzt man nun in 2.7 ein. Die entstehenden Terme findet der Leser im Anhang. Man wendet bei der Umformung der Terme das Mittelungsverfahren an. Dies besagt, dass man nur die sich langsam ändernden Terme betrachtet. Das bedeutet, dass man alle exponentiellen Terme weglässt, die sich schnell gegenüber den langsamsten Termen verändern. Letztendlich ergeben sich für x_0 und x_1 folgende Lösungen:

$$\begin{aligned}\dot{A}_0 &= -i\Delta_0 A_0 + a_0 A_0 + \frac{b}{4} A_0 |A_0|^2 + c_0 A_1 \\ \dot{A}_1 &= -i\Delta_1 A_1 + a_1 A_1 + \frac{b}{4} A_1 |A_1|^2 + c_1 A_0\end{aligned}\quad (2.10)$$

Gleichungen der Form 2.10 werden Amplitudengleichung genannt und beschreiben die Einhüllende der Welle. Ziel dieser Arbeit ist es jedoch, die Phasen der Wellen zu untersuchen, um die Synchronisierung der beiden Pfeifen besser nachvollziehen zu können. Daher benutzt man im folgenden Polarkoordinaten und wählt:

$$A(t) = R(t) \cdot e^{i\Theta(t)} \quad (2.11)$$

R und Θ sind zeitabhängig. Leitet man diesen Ansatz ab und setzt ihn in 2.10 ein, so erhält man Lösungen für die Realteile und die Imaginärteile. Fasst man diese zusammen, erhält man:

$$\begin{aligned}\dot{R}_0 &= a_0 R_0 - \frac{b}{4} |R_0|^2 R_0 + c_0 R_1 \cos(\Theta_1 - \Theta_0) \\ \dot{R}_1 &= a_1 R_1 - \frac{b}{4} |R_1|^2 R_1 + c_1 R_0 \cos(\Theta_0 - \Theta_1) \\ \dot{\Theta}_0 &= -\Delta_0 + c_0 \frac{R_1}{R_0} \sin(\Theta_1 - \Theta_0) \\ \dot{\Theta}_1 &= -\Delta_1 + c_1 \frac{R_0}{R_1} \sin(\Theta_0 - \Theta_1)\end{aligned}\tag{2.12}$$

Für die Phasendifferenz betrachtet man nun die Differenz der Ableitungen der Phasen, gegeben durch das obige Gleichungssystem und erhält:

$$\Delta\dot{\Theta} = (\omega_0 - \omega_1) + \left(c_1 \frac{R_0}{R_1} + c_0 \frac{R_0}{R_1} \sin(\Delta\Theta) \right)\tag{2.13}$$

Gleichung 2.13 nennt man Adlergleichung [3]. Sie beschreibt die Ableitung der Phase in Bezug zum Frequenzunterschied. Interessant für diese Arbeit ist der Fall $\Delta\dot{\Theta} = 0$, weil sich dann der Abstand der Phasen der Wellen nicht verändert und sie synchronisieren. Für die stationären Lösungen erhalten wir also folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}0 &= a_0 R_0 - \frac{b}{4} |R_0|^2 R_0 + c_0 R_1 \cos(\Theta_1 - \Theta_0) \\ 0 &= a_1 R_1 - \frac{b}{4} |R_1|^2 R_1 + c_1 R_0 \cos(\Theta_0 - \Theta_1) \\ 0 &= (\omega_0 - \omega_1) + \left(c_1 \frac{R_0}{R_1} + c_0 \frac{R_0}{R_1} \right) \sin(\Delta\Theta)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Mit diesem Hintergrund lässt sich das System modellieren.

2.3 Signalverarbeitung

Für die Auswertung der Daten braucht man Verfahren, die im Folgenden beschrieben werden. In der Theorie betrachtet man für die obigen Gleichungen stetige Kurven. Bei der Aufnahme eines Audiosignals erhält man allerdings nur eine endliche Anzahl an Punkten. Weiterhin kann man nicht mit Genauigkeit sagen, ob das aufgenommene Signal wirklich periodisch ist, weil man die einzelnen Perioden der aufgenommenen Schwingung zum Zeitpunkt der Aufnahme nicht kennt. Darum braucht man ein sogenanntes Fenster.

Fensterfunktion

Auf die Datenpunkte wird eine sogenannte Fensterfunktion angewandt. Diese sorgt dafür, dass das aufgenommene Signal periodisch wird [20]. Ich verwende für die Aus-

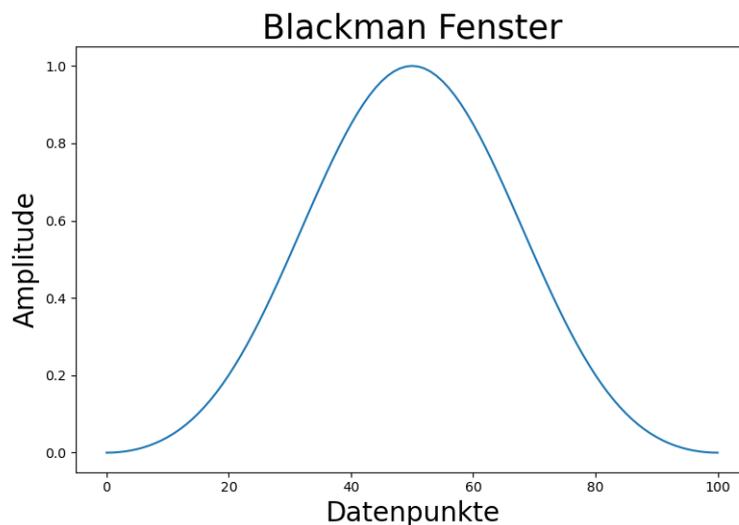


Abbildung 2.1: Blackman Fenster mit 101 Datenpunkten

wertung ein Blackman-Fenster. Dieses hat die Form:

$$w_H(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) \quad (2.15)$$

[13] und ist in Abbildung 2.1 mit 101 Datenpunkten dargestellt. Es wird in der Signalverarbeitung oft benutzt, um die Ränder im Frequenzspektrum zu glätten [13]. Mit dem gefalteten Signal kann man nun die diskrete Fouriertransformation durchführen, um die Frequenzanteile des Signals zu erhalten.

Fourier-Analyse

In diesem Abschnitt werden die kontinuierliche und diskrete Fouriertransformation erläutert. Man benutzt hier die diskrete Fouriertransformation, um aus dem aufgenommenen Signal die Frequenzen zu gewinnen. Die diskrete Fouriertransformation ergibt sich aus der kontinuierlichen Fourier Transformation und ist definiert als:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-2\pi \frac{nk}{N}} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.16)$$

wobei $x(n)$ hier die aufgenommenen Werte des diskreten Signals darstellen [14]. $X(k)$ sind die Spektralkoeffizienten aus denen das Signal besteht. Die Transformation zerlegt ein akustisches Signal in die einzelnen Frequenzanteile [14]. Um dies numerisch auszurechnen, gibt es einen optimierten Algorithmus, die Fast Fourier Transformation. Dieser Algorithmus ist sehr effektiv, da er statt einer Laufzeit von $O(N^2)$ nur eine Laufzeit von $O(N \cdot \log(N))$ benötigt, um das resultierende Signal auszurechnen[14]. Dabei ist N die Anzahl der Datenpunkte.

Im allgemeinen mathematischen Sinn hat die diskrete Fouriertransformation allerdings noch sehr viel mehr Anwendungen. Diese werden hier nicht weiter beschrieben, da sie für diese Arbeit nicht wichtig sind.

Schalldruckpegel Der Schalldruckpegel¹ beschreibt die Stärke einer Druckwelle. Man verwendet ihn, um die Intensität der Schwingung in eine Referenzskala einordnen zu können [23]. Der Schalldruckpegel ist die Division aus quadratischem Druck zu quadratischem Referenzdruck im dekadischen Logarithmus mal 10. Zieht man die Quadrate aus dem Logarithmus, ergibt sich ein Faktor von 20. Diesen Druck in Pascal einer bestimmten Frequenz der Schwingung, bekommt man aus der Fouriertransformation [23]. Der verwendete Referenzdruck ist die Hörschwelle des Menschen, die auf $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa bei 1 kHz festgelegt wurde [23].

$$L_p = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \quad (2.17)$$

Die Einheit, die für L_p verwendet wird, ist Dezibel [dB][23].

Hilberttransformation

Wie in [17] beschrieben, lässt sich die Hilberttransformation folgendermaßen aus der Fast Fourier Transformation berechnen. Man transformiert das Signal mit der Fast Fourier Transformation, verschiebt die resultierenden Frequenzen um $-\pi/2$ und transformiert das Ergebnis mithilfe der inversen Fast Fourier Transformation zurück. Der Imaginärteil entspricht dann der Phase des Signals.

¹Im Folgenden auch SPL genannt, vom englischen Sound-Pressure-Level

3 Aufbau- und Messmethoden des Experimentes

3.1 Messaufbau

Der Messaufbau wird in Kapitel 6 der Quelle [10] beschrieben. Ich fasse hier die für meine Auswertung wichtigsten Punkte zusammen.

Die schematische Konstruktion des Experimentes ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Zwei Pfeifen stehen nebeneinander auf derselben Höhe. Dabei ist Pfeife P2 vertikal und horizontal, schrittweise und vollautomatisch verschiebbar [10]. Die Maximalabstände, die dadurch realisiert werden können, liegen bei 2 m relativ zur Position der Pfeife P1 [10]. Dabei befinden sich beide Pfeifen 0.5 m über dem Boden und Pfeife P1 rechts und rückseitig von den nächsten schallisolierten Wänden entfernt [10]. Jede Pfeife steht auf ihrer eigenen Kanzelle und besitzt somit ihre eigene Luftzufuhr [10]. Das Anblasen der Instrumente wird durch zwei gleichlange Druckluftschläuche, die aus dem Messraum herausführen, gewährleistet [10]. Der Anblasdruck beträgt für beide Pfeifen 75 mmWs ($\approx 7.35hPa$) und kann außerhalb des Messraumes über einen Druckfeinregler verändert werden [10].

Die Messungen wurden mit einer Abtastrate von $f_s = 1 \cdot 10^5$ Hz aufgenommen [10]. Die wichtigsten Messdaten zu den Mikrofonen und Pfeifen finden sich in Tabelle 3.1. Um eine Referenz des stillen Raumes zu bekommen, wurde die Charakteristik des stillen Messraums aufgenommen [10]. Man hat die Messmikrophone mit einem Referenzsignal von 1 kHz kalibriert [10].

Pfeife P2 wird, wie in Abbildung 3.1 dargestellt, in einem Raster horizontal und vertikal verschoben [10]. Dabei wurden verschiedene Messpunkte ausgewählt. Es gibt Messreihen für 80x80, 40x40 und 20x20 Messpunkte. Die Wartezeit (ohne Verfahrdauer) zwischen zwei Einzelmessungen beträgt 5s, um transiente Einschwingvorgänge abzuwarten [10]. Zusammen mit den Zeiten, um die Pfeife P2 von Messpunkt zu Messpunkt zu verfahren, ergibt sich eine Gesamtmesszeit von circa 25 h [10]. Die Luftfeuchte $L_h = 43.9 \pm 0.3\%$ sowie die Temperatur $T = 21.9 \pm 0.2$ °C im Akustiklabor schwanken während der gesamten Messkampagne nur marginal [10]. Für die einzelnen Messungen wurde die Temperatur in den Dateien vermerkt. Allerdings fehlten

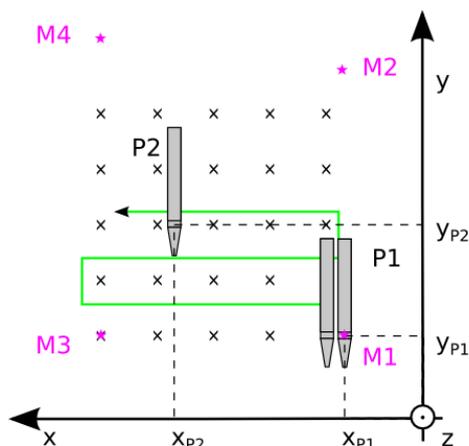


Abbildung 3.1: Schematischer Aufbau des Experimentes mit Position der Pfeifen, der Mikrophone und des Rasters des aufgenommenen Raumes. Dabei sind M1,M2,M3,M4 die Mikrophone, P2 die bewegliche Pfeife und P1 die stationäre Pfeife. [10]

in einigen Dateien die Temperaturen weswegen ich 22°C als Raumtemperatur angenommen habe. Um diesen Wert schwanken die Temperaturen, die in den verschiedenen Messreihen angegeben wurden, marginal. Wie sich in der Fehlerbetrachtung herausstellen wird, spielt das aber kaum eine Rolle für den zu beobachtbaren Effekt. Die Schallgeschwindigkeit unter den genannten Bedingungen beträgt $c_0 = 344.7 \text{ m/s}$. Für meine Auswertung betrachte ich die Versuchsreihe von 20×20 Messpunkten bei einer eingestellten Frequenz von 2104.5 Hz . Dabei befinden sich die Mikrophone in folgendem Abstand zu den Pfeifen:

Mikrophon Einheit	x (m)	y (m)	z (m)
M1	0	0	2.36
M2	0	0.54	2.36
M3	0.73	0	2.36
M4	0.73	1.32	2.36

Tabelle 3.1: Mikrofonpositionen relativ zur Pfeife P1 sowie Laufzeit und Lauflänge des Signals zu den Mikrophenen. Die Position $[0,0,0]$ ist der Aufschnitt von Pfeife P1. [10]

Sample rate	$1 \cdot 10^5$ Hz
Wartzeit	15 s
Messzeit	15 s
Distanz von Rasterpunkt zu Rasterpunkt	2.5 mm
Luftfeuchte	$L_f = 43.9 \pm 0.3\%$
Temperatur	$T = 22$ °C
Ausbreitungsgeschwindigkeit	$c_0 = 344.7$ m/s

Tabelle 3.2: Parameter der Messung [10]

Die Parameter der Messung sind separat in allen Dateien mitgespeichert. Sie unterscheiden sich allerdings in bestimmten Aufnahmereihen. Die hier aufgeschriebenen Parameter sind die für die verwendeten Messreihen, die ich zur Auswertung nutze.

3.2 Stimmung der Pfeifen

Beide Orgelpfeifen werden auf 2104.5 Hz gestimmt. Die Stimmung erfolgt bei einem Pfeifenabstand von 1.4 m [10]:

Gestimmt wird zunächst jede Pfeife separat, wobei die jeweils andere stumm gestellt wird, indem ein kleines Schaumstoffstück im Aufschnitt der Pfeife positioniert wird [10]. Die stumme Pfeife wird so zwar normal angeblasen, jedoch kann der Jet dadurch nicht mehr schwingen. [10]. Nach der separaten Stimmung werden beide Pfeifen noch einmal ohne Stummschaltung vermessen [10]. Der große Abstand in Relation zu den Dimensionen der Orgelpfeifen stellt sicher, dass sich die Pfeifen beim Stimmvorgang nicht beeinflussen, also ungekoppelt sind [10].

3.3 Messmethoden

Mit mehreren Mikrofonen wurden im gesamten Raum Tonaufnahmen gemacht und die Rohdaten in .wave-Dateien gespeichert. Dabei wurde ebenfalls jeweils der Ort und der Abstand zu den Tonquellen erfasst.

4 Auswertung

Die aufgenommenen Daten aus [10] werden mit Python 3.8 ausgewertet. Ich benutze für die Fast Fourier Transformation und die Hilberttransformation sowie das Peak-finding die jeweiligen Sci-Py Module. Der Programmcode sowie weitere Graphen zu anderen ausgewerteten Messreihen befindet sich unter [21]. Im Folgenden beschränke ich mich hier auf eine vertikale und eine horizontale Aufnahmereihe der Frequenz 2104.5 Hz und der Messung über den Raum von 0.2x0.2 Meter. Weiterhin beschäftige ich mich mit der Schalldruckpegel-Karte des gesamten gemessenen Raumes und dem Verhalten der eingestellten Grundfrequenz. Gleichzeitig wird auf die jeweilige Phase der Schwingung eingegangen. Der Abstand zwischen den Pfeifen ist bei allen Graphen mit der Grundfrequenz normiert. In der ausgewählten Aufnahmereihe ergibt sich der Abstand in m über:

$$d_{horizontal} = 0.030 + i \cdot \lambda \cdot \frac{1.22}{20} \quad (4.1)$$

$$d_{vertikal} = i \cdot \lambda \cdot \frac{1.22}{20} \quad (4.2)$$

wobei $\lambda = 0.1639$ m, $1.22 = (d_{max} - d_{min})$ die Differenz aus maximal normiertem Abstand und minimal normiertem Abstand der Pfeifen und i die Anzahl der Aufnahmen ist. Der beginnende, horizontale Abstand der Pfeifen beträgt 30 mm.

4.1 Signalverarbeitung

Das jeweils aufgenommene Signal an einer Position hat eine Form wie in Abbildung 4.1:

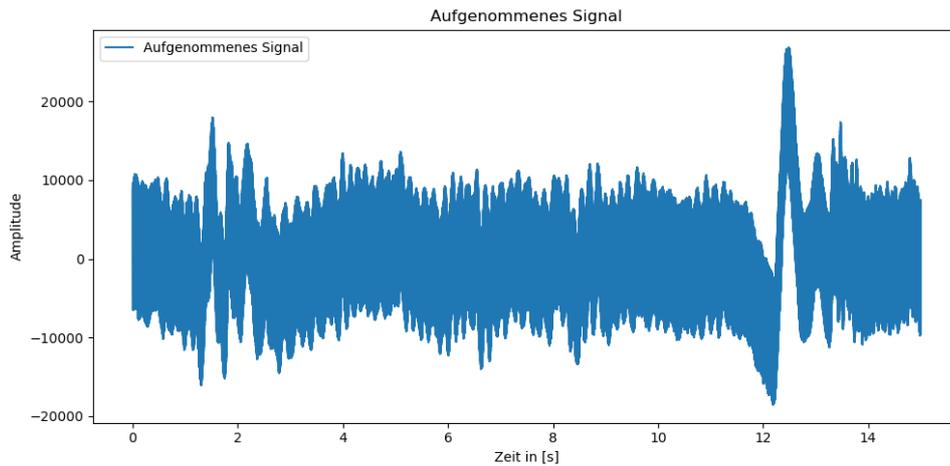


Abbildung 4.1: Beispiel eines aufgenommenen Signals des Mikrophon 1

Mit der Fouriertransformation und der Umrechnung zum Schalldruckpegel 2.17 lässt sich feststellen, welche Frequenz dominiert. Mithilfe des Peakfinding-Algorithmus aus der Sci-Py Bibliothek, lassen sich diese herausfiltern und man erhält folgendes Bild:

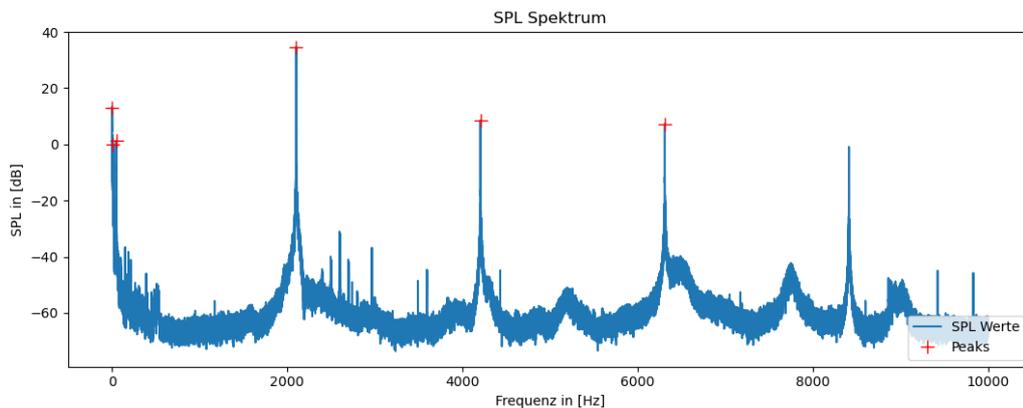


Abbildung 4.2: SPL-Spektrum mit Peaks der resonanten Frequenzen

Rechnet man dieses Spektrum für alle Dateien einer Reihe oder des gesamten Raumes aus, so erhält man Graphen wie Abbildung 4.4, S. 16 a) beziehungsweise Abbildung 4.13, S. 22.

Betrachtet man jedoch die Hilberttransformation der Dateien, so lässt sich die Phase der Schwingung herausfinden.

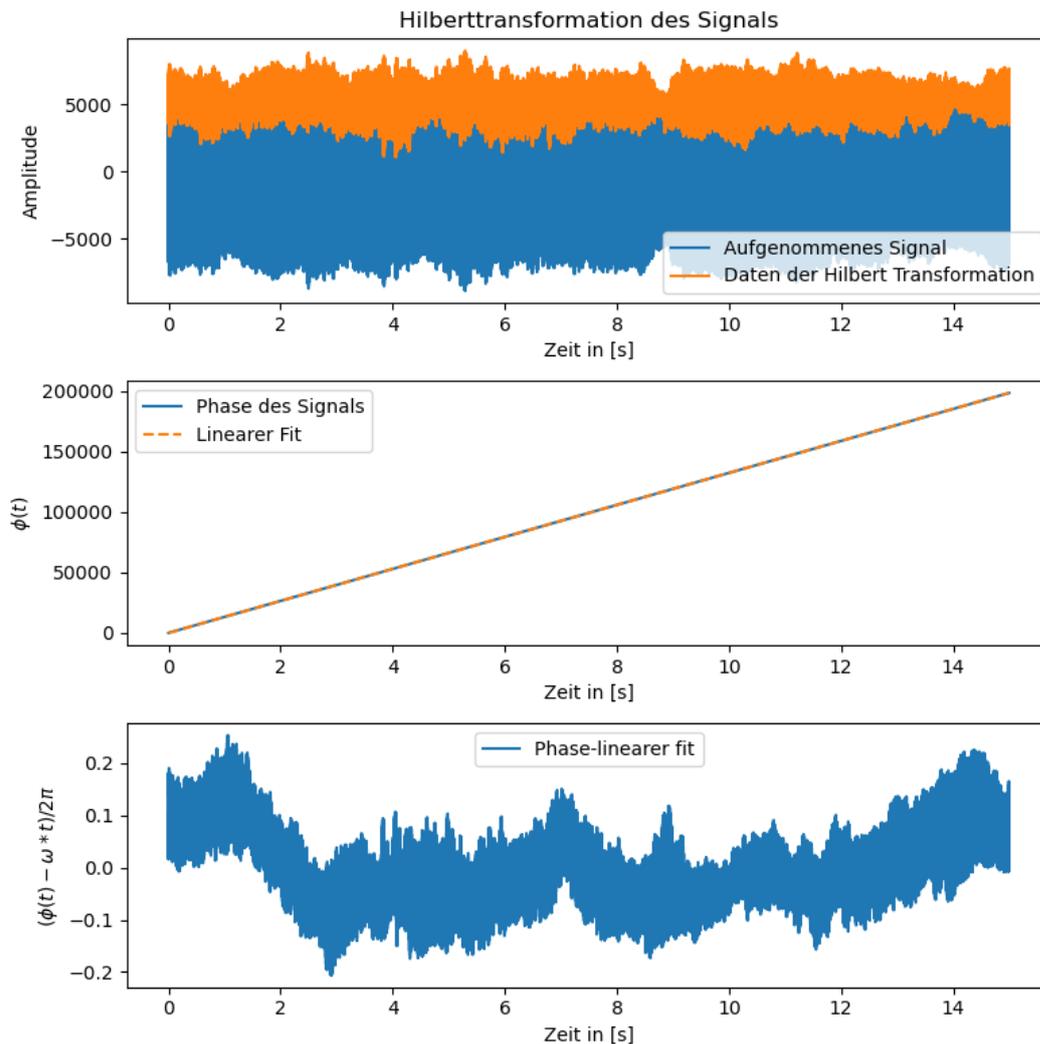


Abbildung 4.3: (oben) Signal und Hilberttransformation des Signals, (mitte) Phase des Signals, (unten) Differenz der Phase zum linearen Fit

Die Phase, im mittleren Graphen der Abbildung 4.3 zu sehen, steigt über die Zeit kontinuierlich an. Die Differenz zu einem linearen Anstieg oszilliert um 0.

4.2 Erste horizontale Aufnahmereihe

Abbildung 4.4, S. 16 stellt den Schalldruckpegel der ersten horizontalen Aufnahmereihe dar.

Man kann in Abbildung 4.4, S. 16 a) erkennen, dass nach etwa $0.39l/\lambda \cong 60$ mm ein größerer Sprung in der Frequenz sowie der Lautstärke auftritt. Bei diesem Sprung erhöht sich die Frequenz und die Lautstärke der Schwingung. Im Falle der zweiten

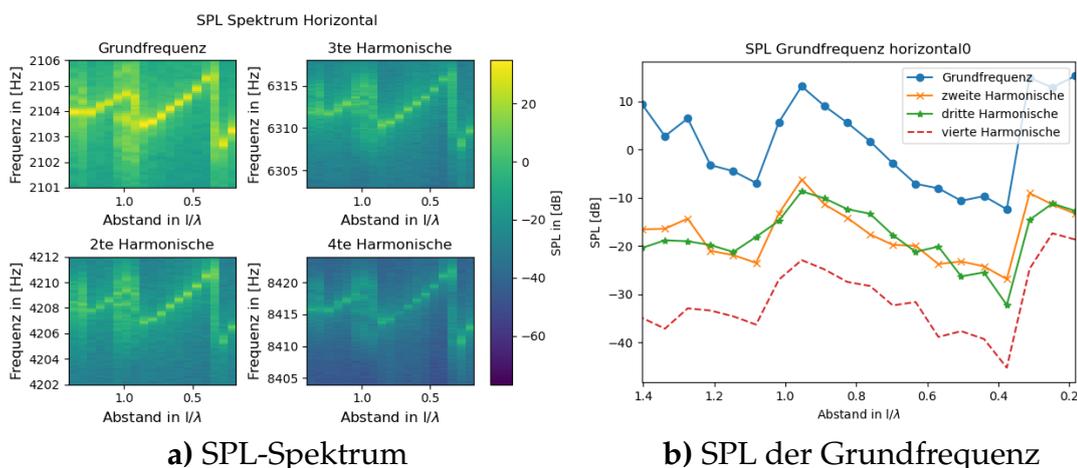


Abbildung 4.4: a) SPL-Spektrum und b) SPL einzelner Frequenzen der ersten Horizontalen Reihe aufgenommen durch das Mikrophon 1. In a) beobachtet man eine Erhöhung der Frequenz kurz vor $0,5 l/\lambda$ und um l/λ . Weiterhin beobachtet man eine Veränderung in der Lautstärke nach den einzelnen genannten Sprüngen. Dieses Phänomen ist in der Abbildung der zweiten Harmonischen deutlich zu erkennen. Deren Frequenzen sind von etwa $[0,0,5] l/\lambda$ um 20 dB laut. Nach dem Sprung, folglich im Intervall $[0,5,1] l/\lambda$ sind die Frequenzen nur noch um die 10 dB laut. Nach dem zweiten Sprung sind die Frequenzen wieder lauter. Man erkennt in b) ein Maximum der Lautstärke der Grundfrequenz bei l/λ sowie ein Minimum bei $0,4 l/\lambda$. Beim betrachten der zweiten Harmonischen erkennt man, wie in a) auch bei der Grundfrequenz nach den Sprüngen einen Lautstärkeunterschied im Größenbereich von 10 bis 20 dB.

Harmonischen ist sie über 10 dB lauter als vor dem Sprung. In Abbildung 4.4, S. 16 b) sieht man verschiedene Plateaus, in der die Grundfrequenz lauter bzw. leiser schwingt.

Wertet man nun die Phasen der Wellen aus, ergibt sich in Abbildung 4.5, S. 17 a), dass es bei dem Sprung bei etwa $l/\lambda \hat{=} 130$ mm einen deutlichen Anstieg der Phasen gibt. In Abbildung 4.5, S. 17 b) ist nun das Signal dargestellt, welches diesen Anstieg mit sich bringt. Zieht man den Anstieg nun von der Phase ab, erhält man eine konstante Schwingung um 0. Die Oszillation der Phase um 0 ist wesentlich kleiner als bei den anderen Aufnahmen.

Diesen Sachverhalt kann man ebenfalls bei den anderen Mikrofonen erkennen. In Abbildung 4.7, S. 18 sieht man die Aufnahmen durch Mikrophon 2. In Abbildung 4.8, S. 18 sieht man die Aufnahme durch das Mikrophon 3. In Abbildung 4.9, S. 19 sieht man die Aufnahme durch das Mikrophon 4.

Unter [21] findet der Leser weitere Grafiken zu den anderen Aufnahmereihen und Mikrofonen.

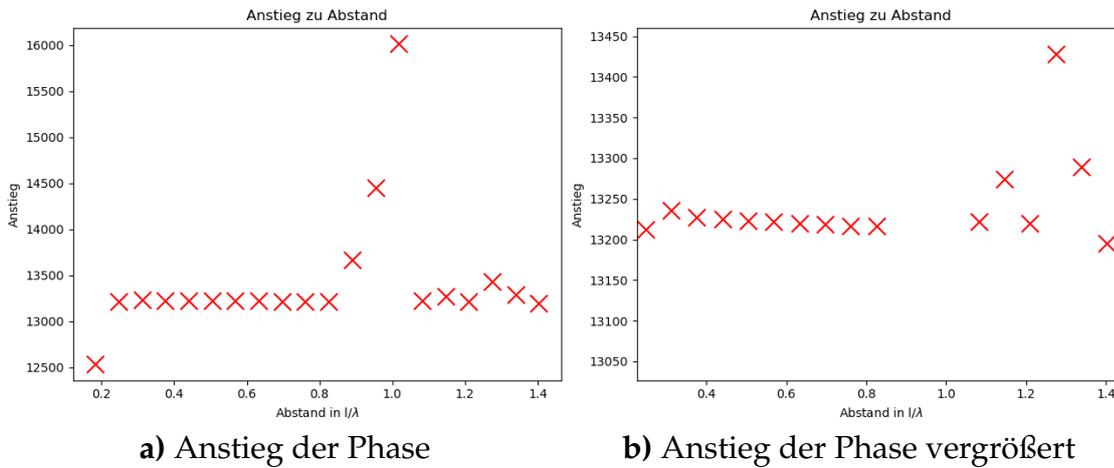
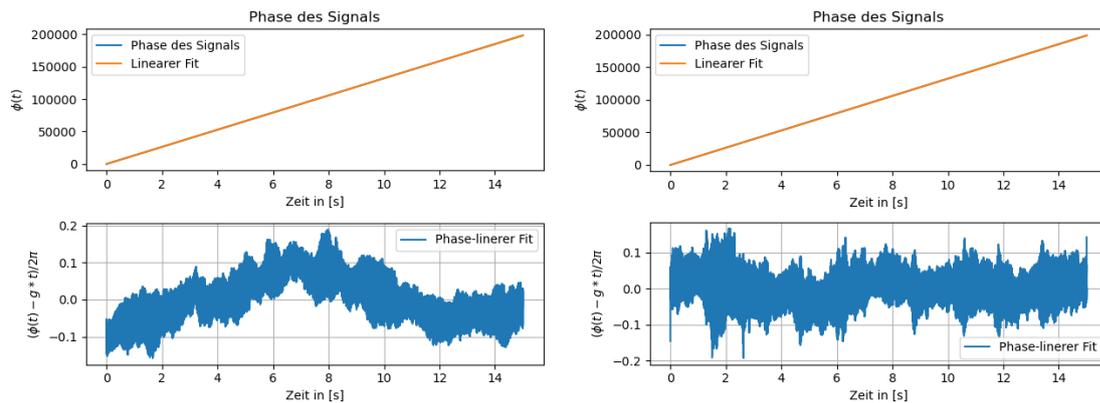


Abbildung 4.5: a) Anstieg der Phase einer jeden Datei im Bezug auf den normierten Abstand der Pfeifen sowie b) derselbe Plot vergrößert; beide aufgenommen durch das Mikrophon 1. Die Vergrößerung der Phase stimmt überein mit den beobachteten Lautstärke und Frequenzunterschieden in Abbildung 4.4. Dies belegt, dass an den Sprüngen die Pfeifen schneller schwingen und somit eine höhere Frequenz aufgenommen wird.



a) Anstieg der Phase bei der Grundfrequenz b) Phase bei größtem Anstieg aufgenommen durch das Mikrophon 1

Abbildung 4.6: Dargestellt ist a) der Anstieg der Phase der Grundfrequenz, b) die Datei des größten Anstiegs, beide aufgenommen durch das Mikrophon 1. Im Vergleich von a) und b) stellt man fest, dass die Differenz zwischen Phase und Plot in b) wesentlich kleiner um 0 oszilliert als in a). Die Phasendifferenz zwischen beiden Pfeifen ist an den Sprüngen also geringer als sonst. Dies bestätigt die Beobachtungen in Abbildung 4.4 und 4.5. Durch das mehr und mehr in Phase schwingende System wird mehr Energie erzeugt, als das System in einer sonstigen Korrelation der Phasen erzeugen würde. Das Resultiert in einer höheren Frequenz, sowie ebenfalls in einem Anstieg der Lautstärke.

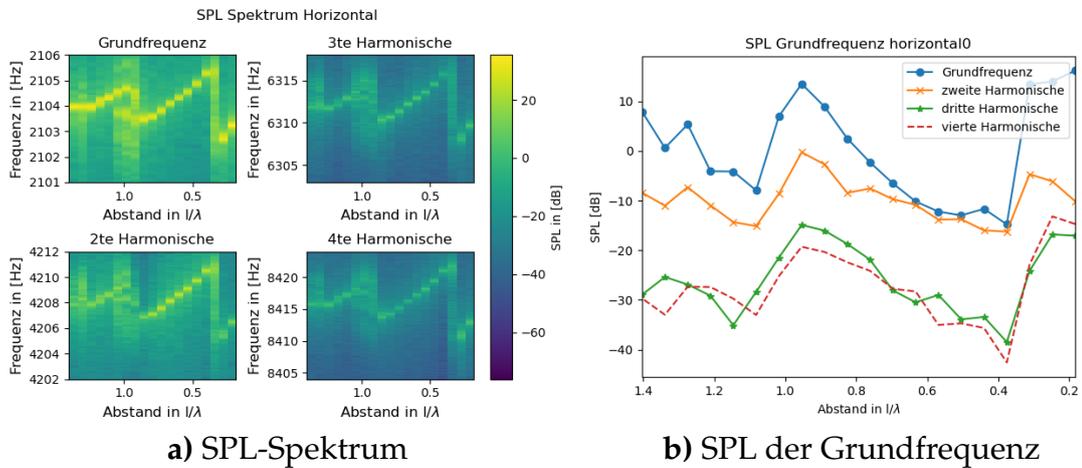


Abbildung 4.7: a) SPL-Spektrum und b) SPL einzelner Frequenzen der ersten Horizontalen Reihe aufgenommen durch das Mikrophon 2

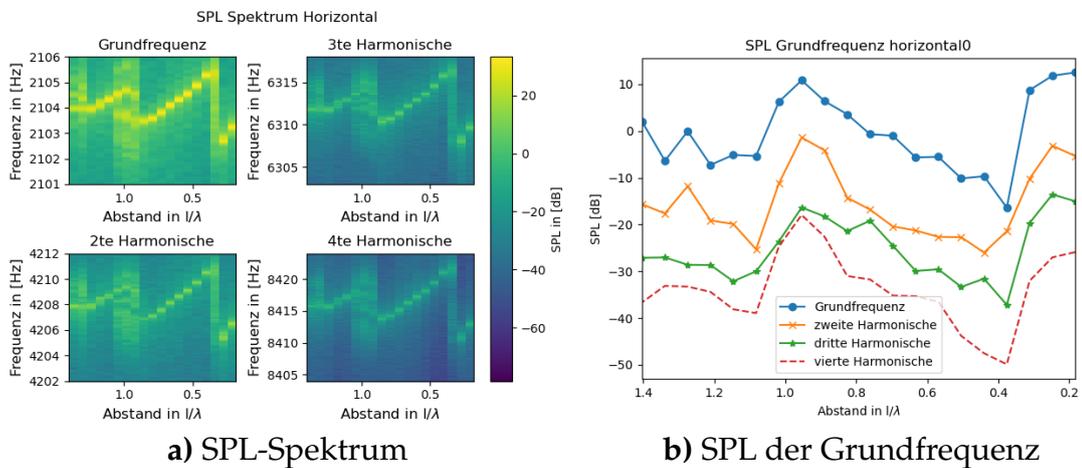


Abbildung 4.8: a) SPL-Spektrum und b) SPL einzelner Frequenzen der ersten Horizontalen Reihe aufgenommen durch das Mikrophon 3

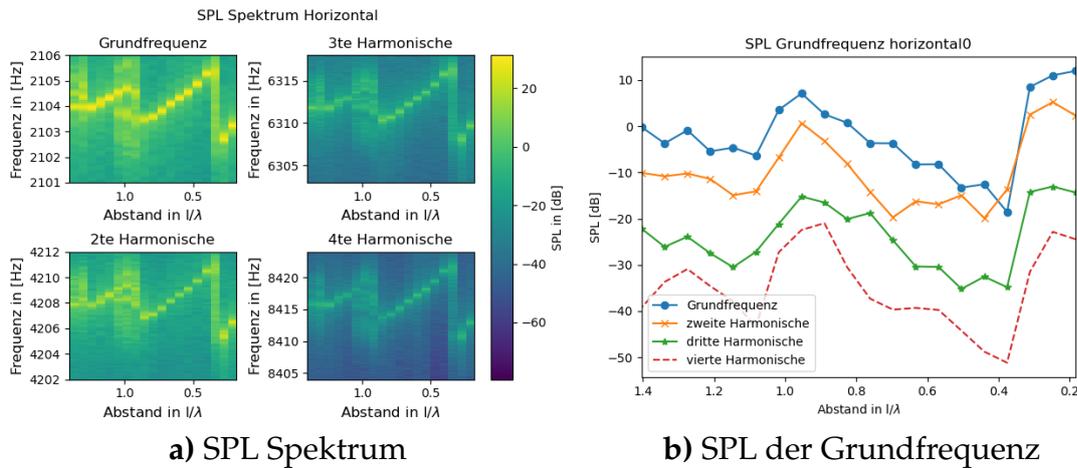


Abbildung 4.9: a) SPL-Spektrum und b) SPL einzelner Frequenzen der ersten horizontalen Reihe aufgenommen durch das Mikrophon 4

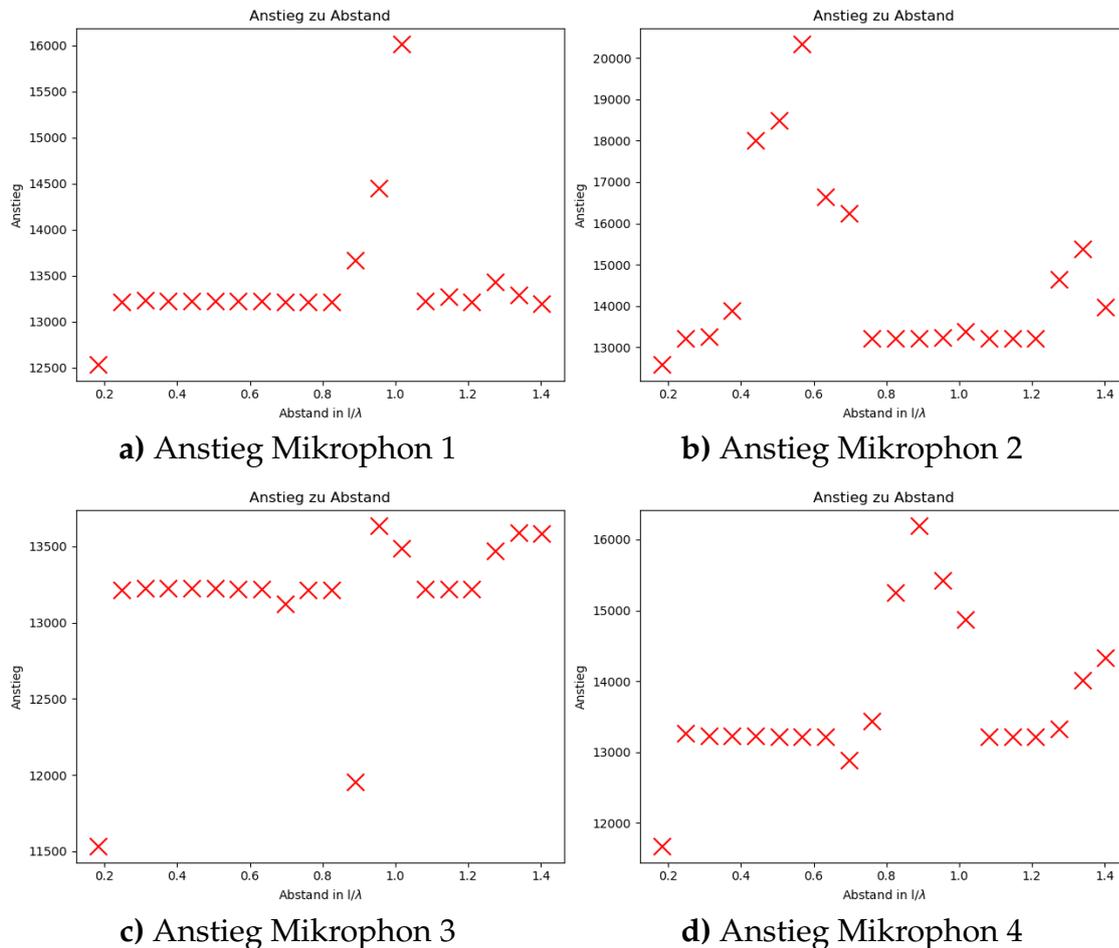


Abbildung 4.10: Anstiege der Phase der jeweiligen Aufnahmen der jeweiligen Mikrophone der ersten horizontalen Aufnahme. Um $1/\lambda$ ergibt sich bei allen 4 Mikrophonen eine Vergrößerung des Anstiegs. Dadurch dass die Phase schneller steigt, ergibt sich auch eine höhere Frequenz. In Mikrophon 2 erkennt man einen deutlichen Anstieg bei $0.5 l/\lambda$.

Bei diesen Grafiken Abbildung 4.10, S. 19 ergibt sich für jedes Mikrofon jedoch ein unterschiedliches Bild. Zwar scheint es bei allen um l/λ eine Veränderung des Anstiegs zu geben. Allerdings gibt es ab etwa $1.3l/\lambda$ eine weitere Veränderung des Anstieges. Das könnte an den unterschiedlichen Positionen der Mikrophone liegen. Durch die sich im Raum ausbreitenden Wellen können Überlagerungseffekte auftreten. Dadurch können diese unterschiedlichen Bilder zustande kommen. Nichtsdestotrotz lässt sich bei allen 4 Mikrophenen ein Anstieg der Frequenz bei l/λ feststellen.

4.3 Erste vertikale Aufnahmereihe

In der vertikalen Messreihe ist etwas anderes zu erkennen als in der horizontalen Reihe. Hier erkennt man einen weichen Übergang zwischen den aufgenommenen Frequenzen.

Man beobachtet kleine Sprünge und eine Tendenz der Erhöhung der Frequenz. Dasselbe erkennt man ebenfalls bei den aufgenommenen Signalen der anderen Mikrophone. Abbildung 4.11, S. 20 zeigt die SPL Spektren zur ersten vertikalen Aufnahmereihe.

4.4 2D Projektion des Messfeldes

In Abbildung 4.13, S. 22 sieht man den Schalldruckpegel der eingestellten Grundfrequenz über den gesamt gemessenen Raum. Man erkennt die Minima und die Maxima der Lautstärke der Grundfrequenz. Bei der ersten Messung mit den Koordinaten $d(x,y) = (0,2;0)l/\lambda$ erkennt man ein Maximum. Bei etwa $d(x,y) = (0,5;0)l/\lambda$ kommt dann ein Minimum. Und kurz vor $d(x,y) = (1;0)l/\lambda$ kommt wieder ein Maximum. In der vertikalen Richtung erkennt man dasselbe. Es beginnt mit einem Ma-

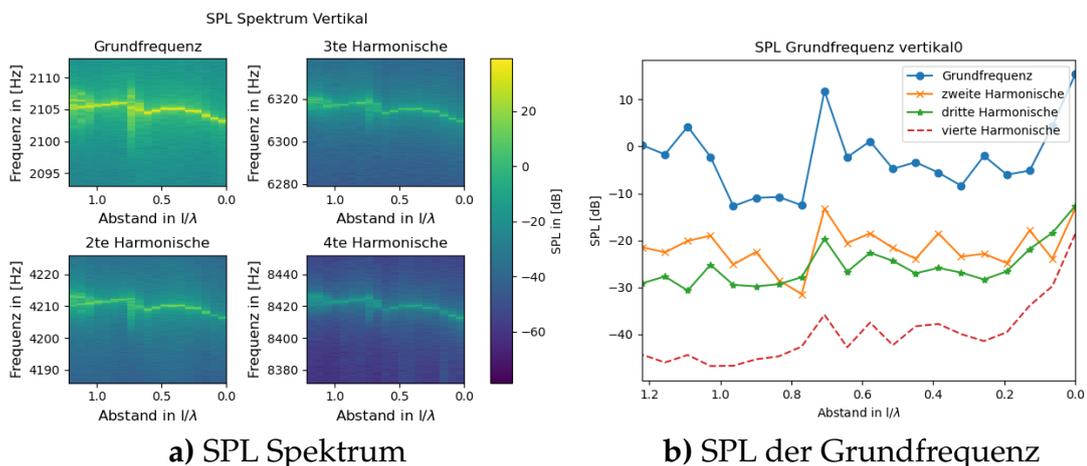


Abbildung 4.11: a) SPL Spektrum und SPL der ersten 4 harmonischen Frequenzen der ersten vertikalen Reihe aufgenommen durch das Mikrofon 1

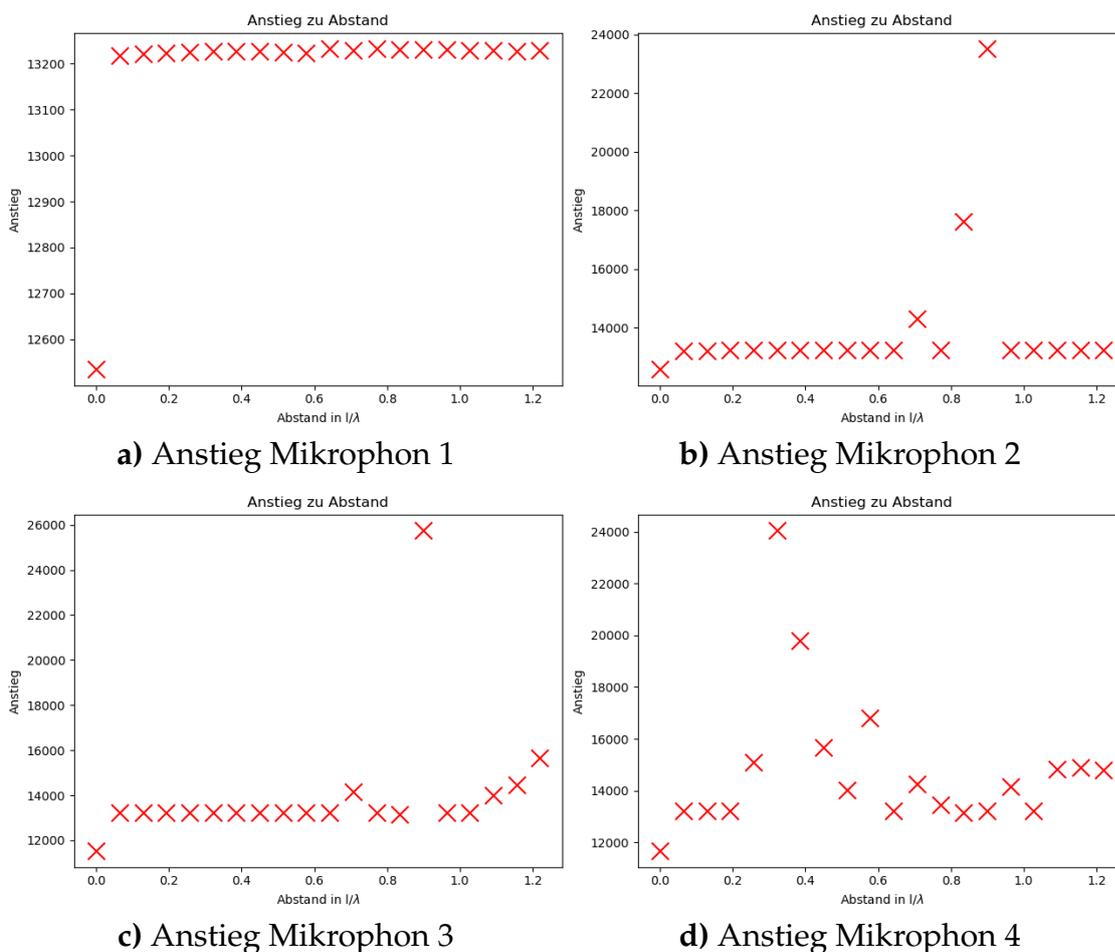


Abbildung 4.12: Anstiege der Phase der jeweiligen Aufnahmen der jeweiligen Mikrophone der ersten vertikalen Aufnahme

ximum, wechselt bei $d(x,y) = (0,2;0,5)l/\lambda$ zu einem Minimum, und ist kurz vor $d(x,y) = (1;0,2)l/\lambda$ wieder bei einem Maximum. Außerdem lässt sich eine zirkuläre Ausbreitung der Welle erkennen. (Abbildung 4.13)

4.5 Vergleich mit anderen Frequenzen

Unter [21] kann man sich die Bilder anderer aufgenommener Messreihen ansehen. Vergleichend lässt sich feststellen, dass man vor allem bei der Messreihe um 527 Hz die beschriebenen Effekte gut beobachten kann. Für 261 Hz ergibt sich ebenfalls ein ähnliches Bild, auch wenn die Veränderungen nicht so deutlich sind.

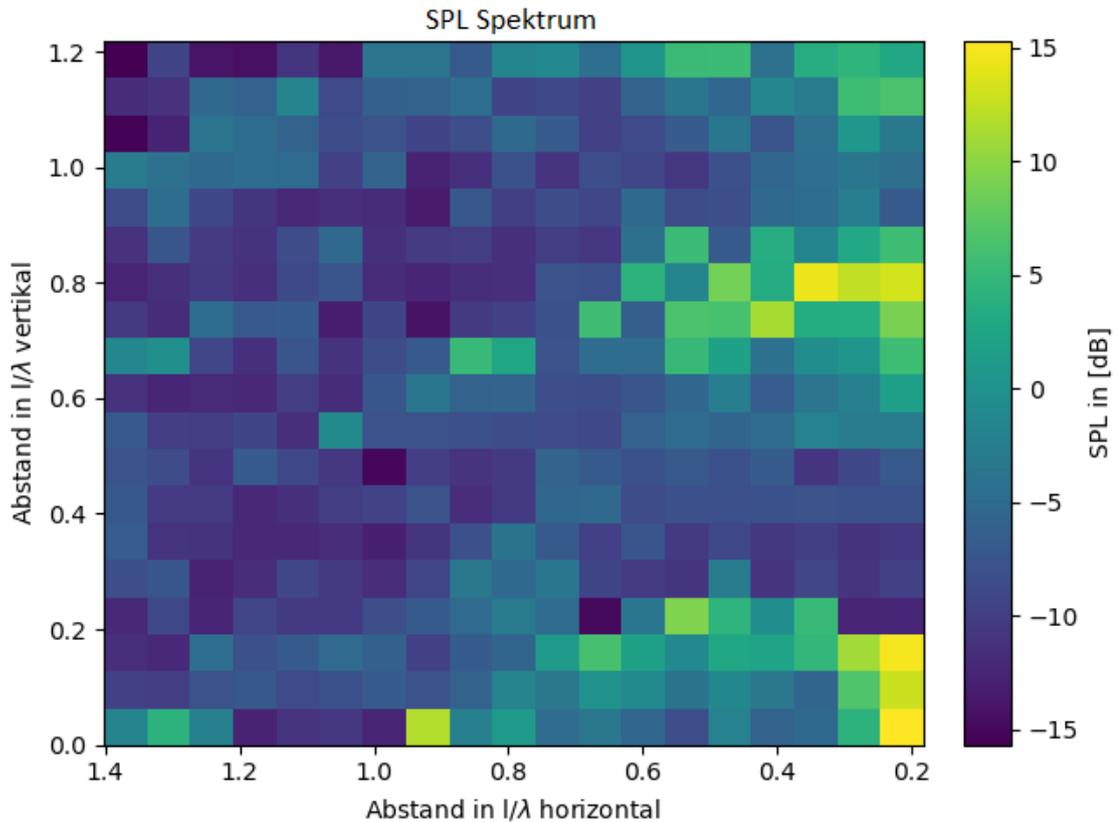


Abbildung 4.13: SPL Karte der Grundfrequenz des Messraumes. Zu erkennen sind hier alle aufgenommenen horizontalen und vertikalen Reihen der Frequenz 2104.5 Hz. Markant sind die schon beschriebenen Maxima und Minima bei $0.5 l/\lambda$ und $1/\lambda$ für die erste horizontale und die erste vertikale Messreihe. Wobei diese bei der ersten vertikalen Messreihe eher bei $0.4 l/\lambda$ und $0.8 l/\lambda$ liegen. Gut zu erkennen sind die zirkulären Plateaus von lauterer zu leiseren Regionen. Dies lässt auf eine zirkuläre räumliche Ausbreitung der Minima und Maxima um die Pfeife P1 schließen.

5 Ergebnisse und Diskussion

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus Kapitel 4 zusammengefasst und diskutiert.

5.1 Erste horizontale Verschiebung

Bei der ersten horizontalen Verschiebung konnte man bei $0.5l/\lambda$ und l/λ einen Lautstärke- und Frequenzsprung erkennen. Diese Sprünge lassen sich dadurch erklären, dass die Pfeifen in den laueren Regionen in Phase schwingen und in den leiseren Regionen gegenphasig. Die versklavten Harmonischen reagieren ähnlich. Wie man in Abbildung 5.1, S. 23 erkennt, besitzen die Schwingungen $\sin(2\pi x)$ und $\sin(2\pi \cdot 3x)$ einen negativen Anstieg bei $x = 0.5$, während Schwingungen $\sin(2\pi \cdot 2x)$ und $\sin(2\pi \cdot 4x)$ einen positiven Anstieg besitzen. Das bedeutet, dass sich die geraden Harmonischen auslöschen, wenn die Pfeifen gegenphasig schwingen. Sie verstärken sich, wenn das System in Phase schwingt. Umgekehrtes gilt für die ungeraden Harmonischen der Grundfrequenz. Betrachtet man nochmals Abbildung 4.4, S. 16 wird klar, dass am ersten Sprung die Pfeifen in Phase schwingen und beim zweiten Sprung die Pfeifen gegenphasig schwingen.

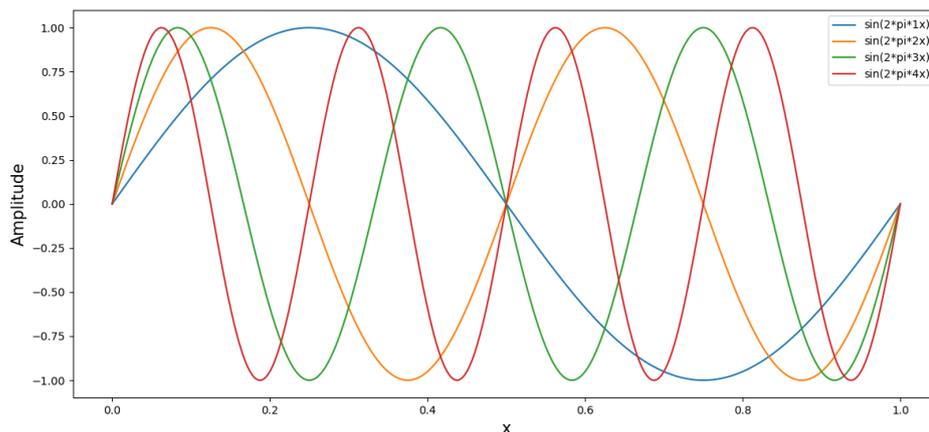


Abbildung 5.1: 4 Sinusschwingungen der Form $\sin(2\pi \cdot a \cdot x)$ wobei $a \in [1, 2, 3, 4]$.

An den Sprüngen in der horizontalen Ebene ändert sich das Schwingungsverhältnis der beiden Pfeifen, von gegenphasig zu gleichphasig und umgekehrt. Dass der Sprung nicht exakt bei $0.5l/\lambda$ liegt, kann an mehreren Faktoren liegen. Zum einen kann es an der nichtlinearen Wechselwirkung in Verbindung mit Welleninterferenzen liegen. Ein anderer Faktor könnte sein, dass sich durch den Wärmeunterschied von der Pfeife zur Außentemperatur eine andere Schallgeschwindigkeit ergibt. Wie in anderen Arbeiten, [19], gezeigt wurde, entsteht durch die Reibung der Luft an den Pfeifeninnenwänden Wärme. Dies kann aber in Simulationen berücksichtigt werden. Dort kann man wie in [19] durchgeführt hat, Faktoren für die Kopplungsstärke und den Delay der Schwingung einführen, die hier in der Auswertung auftreten.

Diese vorhin erwähnten, beobachteten Sprünge (siehe Abbildung 4.4, S. 16) entstehen immer bei Vielfachen von $0.5l/\lambda$ wobei λ die Wellenlänge der eingestellten Frequenz der Pfeifen ist. l ist der Maximalabstand in [m] zwischen den Pfeifen. Das bedeutet, es kann ein Zusammenhang zwischen dem Abstand der Tonquellen und deren synchronen Schwingungsverhältnis hergestellt werden. Ebenfalls lässt sich feststellen, dass der nichtlineare Effekt mit zunehmendem Abstand abnimmt. Erkennbar ist das daran, dass sich das System auf die eingestellte Grundfrequenz einigt. Dies tritt, auf Grund der variierenden Wellenlängen, für verschiedene Frequenzen an unterschiedlichen Abständen ein.

Der Abstand hat ebenfalls Auswirkungen auf die Frequenz. Dadurch, dass durch das gleichphasige bzw. gegenphasige Schwingen mehr Energie im System steckt, als normal zugeführt wird, reagieren die Pfeifen darauf, indem sie schneller schwingen. Dieser Effekt wird mit zunehmendem Abstand schwächer. Allerdings wird er erneut bei Vielfachen von $0.5l/\lambda$ erzeugt, da sich die Pfeifen dort nochmals neu synchronisieren können. Zwischen den Sprüngen können die Pfeifen nicht exakt gegenphasig beziehungsweise in Phase schwingen. Allerdings bleibt die Differenz ihrer Phasen über die gesamte Messzeit erhalten, nachdem sie sich eingeschwungen haben. Dieses Phänomen wird als Phase-locking bezeichnet.

Das sich die Anstiege der verschiedenen Mikrophone in Abbildung 4.10, S. 19 unterscheiden, ist auf Störungen im Raum sowie möglichen Überlagerungen der Wellen an den Messpunkten zurückzuführen. Es ist jedoch ein klarer Anstieg bei etwa l/λ zu erkennen. Das impliziert, dass dort das System wesentlich schneller schwingt als sonst.

5.2 Vertikale Verschiebung

Bei der vertikalen Verschiebung ist nicht dasselbe zu erkennen, wie in der horizontalen Verschiebung der Pfeifen. Man beobachtet eine stetige Erhöhung der Frequenz sowie der Phase. Die Lautstärke bleibt annähernd gleich. In Abbildung 4.11, S. 20 sind so gut wie keine oder nur sehr kleine Sprünge der Frequenz und Lautstärke zu beobachten.

Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass hierfür die Messzeit bis zu 25h gedauert hat, wie in [10] beschrieben wurde. Da es über einen langen Zeitraum schwer war, annähernd gleiche Bedingungen herzustellen, können hier umweltbedingte Messfehler auftreten und keine qualitativen Aussagen getroffen werden.

5.3 SPL Spektrum für alle horizontalen und vertikalen Messreihen

Im aufgenommenen Spektrum 4.13 bestätigt sich, was man aus den vorherigen Reihen schon gesehen hat. Man erkennt die Minima und Maxima der Frequenz in $n \cdot 0.5l/\lambda$, $n \in \mathbb{N}$ Schritten in der horizontalen und vertikalen Richtung. Zusätzlich erkennt man eine zirkuläre Plateaus der Minima und Maxima. Das bedeutet, dass sich die erwähnten Minima und Maxima in einem Radius von $n \cdot 0.5l/\lambda$, $n \in \mathbb{N}$ Schritten um die feststehende Pfeife P1 befinden.

5.4 Fehlerbetrachtung

In einigen Reihen wurde keine Temperatur angegeben, was hier zu Fehlern in der Auswertung führen kann. Bei ± 1 Grad Celsius ergibt sich ein Unterschied von $d_{max}(22^\circ\text{C}) = 1.403l/\lambda \pm 0.002l/\lambda$ im maximalen Horizontalabstand. Angenommen wurde 22 Grad Celsius als Raumtemperatur. Der Unterschied ist allerdings so klein, dass es noch andere Faktoren geben muss, die eine Rolle bei der Verschiebung der Sprünge spielen. Weiterhin herrschen innerhalb der Pfeifen andere Bedingungen als außerhalb der Pfeife, weswegen es zu Schallgeschwindigkeitsänderungen kommen kann, wie im theoretischen Hintergrund schon erläutert. Durch die langen Aufnahmezeiten können ebenfalls Messfehler aufgetreten sein.

5.5 Fazit

Diese Arbeit hat die Auswertung der Daten aus [10] aufgegriffen und mit dessen Ergebnissen verglichen. Dabei wurde mit denselben Daten gearbeitet und folglich, mögliche Fehlerquellen übernommen. Die Auswertung der Daten erfolgte mit Python 3.8. Hierbei wurde vor allem mit den Sci-Py Modulen für die Fouriertransformation, die Hilberttransformation und das Peak-finding gearbeitet. Diese Arbeit konnte zeigen, dass in dem in Kapitel 2 beschriebenen System, Synchronisation auftritt. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass die Sprünge im Schalldruckpegel durch die Abstände der Pfeifen bei Vielfachen von l/λ hervorgerufen werden. An diesen Abständen synchronisieren sich die Orgelpfeifen neu. Im Vergleich mit den oberen harmonischen Schwingungen der Grundfrequenz lässt sich herausfinden, ob die Pfeifen gegenphasig oder gleichphasig schwingen. Die Annahme aus [10], dass diese Sprünge bei Vielfachen von $0.5l/\lambda$ auftreten, kann somit zumindest für die horizontale Messreihe bestätigt werden. Für eine Betrachtung der vertikalen Messreihen müsste eine Vergleichsmessung erfolgen, um

die Effekte zu überprüfen. Um die Effekte mit der Theorie zu vergleichen, könnte man als nächsten Schritt, diese zwei Oszillatoren mit dem Modell aus Kapitel 2 modellieren.

Anhang

Rechnung System mit zwei Oszillatoren

Zwei gekoppelte Oszillatoren

Man beginnt mit zwei unabhängigen nichtlinearen Gleichungen, die die Orgelpfeifen beschreiben:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= f_{vdp}(x_0, \dot{x}_0) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) \\ \ddot{x}_1 &= f_{vdp}(x_1, \dot{x}_1) + c(\dot{x}_0 - \dot{x}_1)\end{aligned}\quad (5.1)$$

Van der Pol einsetzen:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= -\omega_0^2 x_0 + \alpha \dot{x}_0 (1 - \beta x_0^2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) \\ \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 x_1 + \alpha \dot{x}_1 (1 - \beta x_1^2) + c(\dot{x}_0 - \dot{x}_1)\end{aligned}\quad (5.2)$$

Umbenennung der Parameter:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= -\omega_0^2 x_0 + \underbrace{(\alpha - c)}_{=: a} \dot{x}_0 - \underbrace{\alpha \beta}_{=: b} \dot{x}_0 x_0^2 + c \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 x_1 + \underbrace{(\alpha - c)}_{=: a} \dot{x}_1 - \underbrace{\alpha \beta}_{=: b} \dot{x}_1 x_1^2 + c \dot{x}_0\end{aligned}\quad (5.3)$$

Man überführt die Gleichungen zweiter Ordnung in zwei Gleichungen erster Ordnung: ($\dot{x}_j = y_j$; $\dot{y}_j = \text{r.h.s}$ von den Gleichungen 5.3):

$$\dot{x}_0 \begin{cases} \dot{x}_0 &= y_0 \\ \dot{y}_0 &= -\omega_0^2 x_0 + a y_0 - b y_0 x_0^2 + c y_1 \end{cases}\quad (5.4)$$

$$\dot{x}_1 \begin{cases} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= -\omega_0^2 x_1 + a y_1 - b y_1 x_1^2 + c y_0 \end{cases}\quad (5.5)$$

Beispiel an y_0 . Die gleiche Vorgehensweise gilt für y_1 Man benutzt den Ansatz:

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{2} \left(A_0 e^{i\omega t} + A_0^* e^{-i\omega t} \right) \\ y_0 &= \frac{1}{2} \left(i\omega A_0 e^{i\omega t} + i\omega A_0^* e^{-i\omega t} \right)\end{aligned}\quad (5.6)$$

Damit ergeben sich dann folgende einzelne Terme:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0 &= \frac{1}{2} \left(i\omega \dot{A}_0 e^{i\omega t} + i\omega \dot{A}_0^* e^{-i\omega t} - \omega^2 A_0 e^{i\omega t} - \omega^2 A_0^* e^{-i\omega t} \right) \\
-\omega_0^2 x_0 &= -\omega_0^2 \frac{1}{2} \left(A_0 e^{i\omega t} + A_0^* e^{-i\omega t} \right) \\
ay_0 &= a \frac{1}{2} \left(i\omega A_0 e^{i\omega t} + i\omega A_0^* e^{-i\omega t} \right) \\
by_0 x_0^2 &= b \frac{1}{2} \left(i\omega A_0 e^{i\omega t} - i\omega A_0^* e^{-i\omega t} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{1}{2} \left(A_0 e^{i\omega t} + A_0^* e^{-i\omega t} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(A_0 e^{i\omega t} + A_0^* e^{-i\omega t} \right) \\
cy_1 &= c \frac{1}{2} \left(i\omega A_1 e^{i\omega t} + i\omega A_1^* e^{-i\omega t} \right)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Jetzt teilt man alle Terme durch $i\omega \cdot e^{i\omega t}$. Dadurch ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0 &= \frac{1}{2} \left(\dot{A}_0 + \dot{A}_0^* e^{-2i\omega t} - \frac{\omega^2}{i\omega} A_0 - \frac{\omega^2}{i\omega} A_0^* e^{-2i\omega t} \right) \\
-\omega_0^2 x_0 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{i\omega} \left(A_0 + A_0^* e^{-2i\omega t} \right) \\
ay_0 &= a \frac{1}{2} \left(A_0 + A_0^* e^{-2i\omega t} \right) \\
by_0 x_0^2 &= \frac{b}{8} \frac{i\omega}{i\omega} \left(A_0^2 e^{2i\omega t} - A_0^{*2} e^{-2i\omega t} \right) \left(A_0 e^{i\omega t} + A_0^* e^{i\omega t} \right) \\
cy_1 &= c \frac{1}{2} \left(A_1 + A_1^* e^{-2i\omega t} \right)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Nun sind die Terme interessant, die keine schnelle Bewegung verursachen. Das bedeutet, man kann die Terme mit $e^{i\omega t}$ oder höher herausnehmen, weil diese für eine schnelle Bewegung im Phasenraum verantwortlich sind. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0 &= \frac{1}{2} \left(\dot{A}_0 - \frac{\omega}{i} A_0 \right) \\
-\omega_0^2 x_0 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{i\omega} A_0 \\
ay_0 &= a \frac{1}{2} A_0 \\
by_0 x_0^2 &= \frac{b}{8} \left(A_0^3 e^{3i\omega t} - |A|^2 A_0 e^{-i\omega t} + |A_0|^2 A_0 e^{i\omega t} - A_0^{*3} e^{-3i\omega t} \right) \\
&= \frac{b}{8} |A_0|^2 A_0 \\
cy_1 &= \frac{1}{2} c A_1
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Weiterhin beobachtet man ω in der Umgebung von ω_0 . Das bedeutet, $\frac{\omega_0^2}{\omega} = \omega_0$ für $\omega = \omega_0 + \varepsilon$. Wobei ε sehr klein ist. Außerdem ist $\frac{1}{i} = -i$. Wenn man nun alles in

Gleichung \dot{y}_0 aus Gleichung 5.5 einsetzt, und nach \dot{A} umstellt (mal 2 und $+\frac{\omega}{i}A_0$), erhält man:

$$\dot{A}_0 = -i(\underbrace{\omega_0 - \omega}_{\Delta_0})A_0 + aA_0 - \frac{b}{4}A_0|A_0|^2 + cA_1 \quad (5.10)$$

Gleichung 5.10 wird Amplitudengleichung genannt und beschreibt die Einhüllende der zu beobachtenden Welle. Das Verfahren wird Mittelungsverfahren genannt.

Jetzt möchte man auf die Phasengleichung kommen.

Dazu verwendet man $A(t) = R(t) \cdot e^{i\Theta(t)}$. Leitet man das ab erhält man:

$$\dot{A} = \underbrace{\dot{R}e^{i\Theta}}_{Re(\dot{A})} + iR\Theta e^{i\Theta} \quad (5.11)$$

Wobei A eine komplexe Zahl ist. Einsetzen in Gleichung 5.10 gibt:

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 &= \underbrace{-i\Delta_0 R_0 e^{i\Theta_0}}_{\text{weglassen weil imaginär}} + aR_0 e^{i\Theta_0} - \frac{b}{4}|R_0|^2 R_0 + cR_1 e^{i\Theta_1} \\ \dot{R}_0 &= aR_0 e^{i\Theta_0} - \frac{b}{4}|R_0|^2 R_0 + cR_1 \underbrace{\frac{e^{i\Theta_1}}{e^{i\Theta_0}}}_{\text{Euler}} \\ \dot{R}_0 &= aR_0 - \frac{b}{4}|R_0|^2 R_0 + cR_1 \cos(\Theta_1 - \Theta_0) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dabei ist zu beachten, dass man Terme mit i , wie zum Beispiel $i(\omega_0 - \omega)$ beim Realteil weglassen kann, weil man dort nur den Realteil betrachtet. Gleiches, nur mit den Imaginärteilen, gilt für den Imaginärteil der Lösung. Die eulersche Formel $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ [15] verwendet man für die übrigen Exponentialterme. Dasselbe ergibt sich für die imaginären Terme:

$$\begin{aligned} R_0 \dot{\Theta}_0 e^{i\Theta_0} &= -\Delta_0 R_0 e^{i\Theta_0} + \underbrace{aR_0 e^{i\Theta_0}}_{\text{weglassen}} - \frac{b}{4} \underbrace{|R_0 e^{i\Theta_0}|^2}_{\text{weglassen}} R_0 e^{i\Theta_0} + cR_1 e^{i\Theta_1} \\ \dot{\Theta}_0 &= -\Delta_0 + c \frac{R_1}{R_0} \sin(\Theta_1 - \Theta_0) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dabei sind $\Theta(t)$, $R(t)$ und $A(t)$ von der Zeit abhängig. Letztendlich ergeben sich für die Amplitudengleichungen beider Systeme:

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 &= -i\Delta_0 A_0 + a_0 A_0 + \frac{b}{4} A_0 |A_0|^2 + c_0 A_1 \\ \dot{A}_1 &= -i\Delta_1 A_1 + a_1 A_1 + \frac{b}{4} A_1 |A_1|^2 + c_1 A_0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

und für die Phasengleichungen:

$$\begin{aligned}
 \dot{R}_0 &= a_0 R_0 - \frac{b}{4} |R_0|^2 R_0 + c_0 R_1 \cos(\Theta_1 - \Theta_0) \\
 \dot{R}_1 &= a_1 R_1 - \frac{b}{4} |R_1|^2 R_1 + c_1 R_0 \cos(\Theta_0 - \Theta_1) \\
 \dot{\Theta}_0 &= -\Delta_0 + c_0 \frac{R_1}{R_0} \sin(\Theta_1 - \Theta_0) \\
 \dot{\Theta}_1 &= -\Delta_1 + c_1 \frac{R_0}{R_1} \sin(\Theta_0 - \Theta_1)
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Betrachtet man die Phasendifferenz, ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \Delta\dot{\Theta} &= \dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_0 = -(\omega_1 - \omega) + c_1 \frac{R_0}{R_1} \sin(\Theta_0 - \Theta_1) - \\
 &\quad - \left(-(\omega_0 - \omega) + c_0 \frac{R_1}{R_0} \sin(\Theta_1 - \Theta_0) \right)
 \end{aligned}$$

Mit $\sin(-x) = -\sin(x)$ und kürzen erhält man die Adlergleichung:

$$\Delta\dot{\Theta} = (\omega_0 - \omega_1) + \left(c_1 \frac{R_0}{R_1} + c_0 \frac{R_1}{R_0} \right) \sin(\Delta\Theta) \tag{5.16}$$

Interessant für diese Arbeit ist der Fall $\Delta\dot{\Theta} = 0$, weil sich dadurch der Abstand der Phasen der Wellen nicht verändert und sie synchronisieren. Für stationäre Lösungen ($\dot{R}_0 = \dot{R}_1 = 0$) ergeben sich also die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 0 &= a_0 R_0 - \frac{b}{4} |R_0|^2 R_0 + c_0 R_1 \cos(\Theta_1 - \Theta_0) \\
 0 &= a_1 R_1 - \frac{b}{4} |R_1|^2 R_1 + c_1 R_0 \cos(\Theta_0 - \Theta_1) \\
 0 &= (\omega_0 - \omega_1) + \left(c_1 \frac{R_0}{R_1} + c_0 \frac{R_1}{R_0} \right) \sin(\Delta\Theta)
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Über diese Gleichungen ließe sich das System modellieren und die experimentellen Befunde überprüfen.

Quellcode des Auswertprogramms

Den Quellcode des Auswertungsprogrammes findet man unter: [21].

Literaturverzeichnis

- [1] M. Abel, K. Ahnert, and St. Bergweiler. Synchronization of sound sources. *Phys. Rev. Lett.*, 103:114301, Sep 2009.
- [2] M. Abel, S. Bergweiler, and R. Gerhard-Multhaupt. Synchronization of organ pipes: experimental observations and modeling. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 119(4):2467–2475, 2006.
- [3] R. Adler. A study of locking phenomena in oscillators. *Proc. IRE*, (34):351–357, 1946.
- [4] W. Benenson, J. W. Harris, H. Stocker, and L. Holger. *Handbook of Physics*. Springer-Verlag New York, 2002.
- [5] W. Demtröder. *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [6] W. Demtröder. *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [7] S. A. Elder. Theory of organ pipe sound generation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 48(1A):89–89, 1970.
- [8] B. Fabre and A. Hirschberg. Physical modeling of flue instruments: A review of lumped models. *Acustica - Acta Acustica*, (86):599–610, 2000.
- [9] A. Feldmeier. *Theoretische Mechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [10] J. Fischer. *Nichtlineare Kopplungsmechanismen akustischer Oszillatoren am Beispiel der Synchronisation von Orgelpfeifen*. Universität Potsdam, 2014.
- [11] N. H. Fletcher. The nonlinear physics of musical instruments. *Rep. Prog. Phys.*, 62:723–764, 1999.
- [12] G. W. Griffiths and W. E. Schiesser. Linear and nonlinear waves, 2009. http://www.scholarpedia.org/article/Linear_and_nonlinear_waves abgerufen am 03.03.2021.

- [13] F. J. Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, 66(1):51–83, 1978.
- [14] A. Mertens. *Signaltheorie*. Springer, 2020.
- [15] G. Merziger, G. Mühlbach, D. Wille, and T. Wirth. *Formeln+Hilfen Höhere Mathematik*. Binomi Verlag, 2018.
- [16] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1987.
- [17] A. Pikovski, M. Rosenbluhm, and J. Kurth. *Synchronization: A universal Concept in nonlinear science*. Cambridge University Press, 2001.
- [18] J. W. S. Rayleigh. On the pitch of organ-pipes. *Philosophical Magazine*, 5(XIII):340–347, 1882.
- [19] J. Sawicki, M. Abel, and E. Schöll. Synchronization of organ pipes. *The European Physical Journal B*, 91, 08 2017.
- [20] Julius O. Smith. *Spectral Audio Signal Processing*. <http://ccrma.stanford.edu/~jos/sasp/>, abgerufen am 05.03.2021. online book, 2011 edition.
- [21] J. Stähle. Quellcode und Bilder der Bachelorarbeit. Box UP, 03.03.2021. <https://boxup.uni-potsdam.de/index.php/s/cgjXbadoQSkPE9T> password: Synchronisation.
- [22] S. Thwaites and N. H. Fletcher. Acoustic admittance of organ pipe jets. *J. Acoust. Soc. Am.*, (74):400–408, 1983.
- [23] Arnt Inge Vistnes. *Physics of Oscillations and Waves*. Springer, 2018.