



Universität Potsdam
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Physik und Astronomie

Masterarbeit

im Studiengang Physik – Schwerpunkt Statistische Physik und Chaostheorie

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Education

Thema: Die Abhängigkeit der Trajektorie eines Satelliten zwischen Erde und Mond vom Startwinkel auf der Erde im restriktiv zirkulär planaren Drei-Körper-Problem und seine didaktischen Aspekte

Autorin: Jasmin Sophie Pusch
jpusch@uni-potsdam.de
MatNr. 775752

Version vom: 18. Februar 2022

Betreuer: Prof. Dr. Arkady Pikovsky
2. Betreuer: Prof. Dr. Andreas Borowski

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1. Einleitung | 4 |
| 2. Theoretischer Hintergrund | 6 |
| 2.1. Die Himmelsmechanik und das Zwei-Körper-Problem | 6 |
| 2.1.1. Die Planetenbewegung als Ein-Körper-Problem | 6 |
| 2.1.2. Die Keplerschen Gesetze | 9 |
| 2.1.3. Die Planetenbewegung als Zwei-Körper-Problem | 9 |
| 2.2. Grundlegende Annahmen des Drei-Körper-Problems | 10 |
| 2.2.1. Die Bewegungsgleichungen des restriktiv zirkulär planaren Drei-Körper-Problems | 10 |
| 2.2.2. Die Gleichgewichtspunkte und die Hill-Umgebung | 13 |
| 2.3. Chaostheoretische Aspekte des Drei-Körper-Problems | 16 |
| 2.4. Das Runge-Kutta-Verfahren und die Schrittweitensteuerung | 17 |
| 2.4.1. Einschrittverfahren | 17 |
| 2.4.2. Runge-Kutta-Verfahren | 18 |
| 2.4.3. Schrittweitensteuerung | 19 |
| 3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond | 24 |
| 3.1. Zu untersuchende Fragen und Hypothesen | 24 |
| 3.2. Implementierung des Drei-Körper-Problems im System Erde-Mond | 25 |
| 3.3. Auswertung der ermittelten Daten | 27 |
| 3.4. Beantwortung der Fragen und Überprüfung der Hypothesen | 38 |
| 4. Didaktische Aspekte zum PCR3BP | 40 |
| 4.1. Einordnung des Drei-Körper-Problems in den Rahmenlehrplan | 40 |
| 4.2. Projektwoche „Wie bewegt sich eine Rakete im All? Eine Einführung in das Drei-Körper-Problem und die Chaostheorie“ | 41 |
| 4.2.1. Thematische Beschreibung | 42 |
| 4.2.2. Möglicher Ablauf | 42 |
| 4.3. Einordnung des Konzeptes in die Bildungsstandards | 45 |
| 4.3.1. Physik als theoriegeleitete Erfahrungswissenschaft | 45 |
| 4.3.2. Basiskonzepte | 46 |
| 4.3.3. Kompetenzbereiche | 47 |
| 5. Schlussfolgerung | 51 |

| | |
|---|-----------|
| Literatur | 53 |
| A. Abkürzungen | 56 |
| B. Quelltexte | 57 |
| B.1. Klassisches RKV für das PCR3BP (Test) | 57 |
| B.2. DPV mit Schrittweitensteuerung für das PCR3BP (Test) | 58 |
| B.3. DPV mit Schrittweitensteuerung für das PCR3BP (Abbildung der Trajektorien) | 62 |
| B.4. DPV mit Schrittweitensteuerung für das PCR3BP (Abhängigkeit der Trajektorie vom Startwinkel) | 67 |
| C. Kompetenzbereiche Bildungsstandards | 72 |
| C.1. Sachkompetenz | 72 |
| C.2. Erkenntnisgewinnungskompetenz | 73 |
| D. Erklärung | 74 |

1. Einleitung

Das Drei-Körper-Problem ist ein lange bestehendes Problem: Bereits seit dem 18. Jahrhundert forschten bekannte Mathematiker und Physiker wie Euler, Lagrange und Poincaré an einer Lösung dessen (vgl. [Letellier, 2019], S. 11 ff.). Doch eine solche zu finden, ist schwer, zeigte nicht letzterer sogar, dass bereits das eingeschränkte nicht analytisch lösbar sei (vgl. [Argyris et al., 2017], S. 149). Mit dem heutigen Stand konnten nun schon einige Trajektorien gefunden werden und das Drei-Körper-Problem ist in der Anwendung insbesondere in der Raumfahrt nicht mehr wegzudenken, z.B. beim Swingby-Manöver (vgl. [Messerschmid & Fasoulas, 2017], S. 154 ff.).

Weiterhin ist das Drei-Körper-Problem ein bekanntes Problem in der Chaostheorie: kleine Abweichungen der Anfangswerte führen zu chaotischem Verhalten (vgl. [Demtröder, 2015], S. 388 f.). Allerdings wurde bisher wenig konkret an der Laufzeit der Trajektorien sowie die Anzahl der Umrundungen geforscht, wenn diese unter dem Einfluss der Richtung der Startgeschwindigkeit stehen. Unter welchem Startwinkel lässt sich der Mond mit der zum Beispiel meisten Anzahl an Umrundungen beobachten? Lässt sich dieselbe Anzahl auch in weniger Zeit bewerkstelligen? Was passiert, wenn das Flugobjekt nur einen Bruchteil von der Richtung abweicht? Hierbei kann die Chaostheorie unterstützen.

In der Masterarbeit wird daher die Frage nach dem Zusammenhang zwischen verschiedenen Trajektorien eines Satelliten als Lösungskurven des restriktiv zirkulär planaren Drei-Körper-Problems im System Erde-Mond und der Richtung der Geschwindigkeit, mit der der Satellit von der Erde aus startet, wenn die Startposition gleichbleibt, beantwortet. Es werden die Umrundungen um den Mond gezählt und die Zeit gemessen und in Abhängigkeit dieses Startwinkels abgebildet. Weiterhin werden Bahnkurven mit verschiedenen Startwinkeln verglichen. Abschließend soll auch eine Implementierung dieses Problems in den Physikunterricht der Sekundarstufe II erfolgen.

Um die Ergebnisse so genau wie möglich zu modellieren, wird für den Forschungsteil dieser Arbeit das Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitensteuerung benutzt. Das ist damit begründet, weil das restriktiv zirkulär planare Drei-Körper-Problem keine analytischen Lösungen besitzt (vgl. [Argyris et al., 2017], S. 149) und die numerische Integration die Möglichkeit bietet, diese nachzubilden (vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], S. 551). Im didaktischen Part wird die Umsetzung des restriktiv zirkulär planaren Drei-Körper-Problems im Unterricht in die neuen Richtlinien der Kultusministerkonferenz sowie in den Entwurf des Rahmenlehrplanes eingebettet.

1. Einleitung

Die Masterarbeit untergliedert sich in drei Teile: im ersten Teil (Kapitel 2) werden theoretische Grundsteine geschaffen. Die Himmelsmechanik wird vom Ein-Körper-Problem zum Drei-Körper-Problem überführt. Weiterhin werden auch die chaostheoretischen Grundzüge betrachtet. Abschließend folgen die Erläuterungen zum Runge-Kutta-Verfahren als Werkzeug für die Forschung.

Kapitel 3 befasst sich mit der Forschung über die Abhängigkeit der Trajektorien vom Startwinkel der Rakete. Hier werden Hypothesen zum Problem aufgestellt, diese implementiert und geplottet. Zum Schluss folgt eine Überprüfung der Hypothesen.

Der letzte Teil (Kapitel 4) beinhaltet die Umsetzung im Unterricht in Form einer Projektwoche. Hier werden die teilweise fächerübergreifenden Aspekte des restriktiv zirkulär planaren Drei-Körper-Problems beleuchtet. Weiterhin folgt eine beispielhafte Implementierung und eine Einbettung im Hinblick auf Basiskonzepte und Kompetenzbereiche in die Richtlinien der Kultusministerkonferenz und in den Entwurf des Rahmenlehrplans für das Fach Physik in der Sekundarstufe II.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1. Die Himmelsmechanik und das Zwei-Körper-Problem

Das Drei-Körper-Problem (kurz: 3KP) ist unter anderem ein mechanisches Problem. Um dieses nachvollziehen zu können, ist es wichtig, einen Rückblick auf das Ein-Körper-Problem (kurz: 1KP) und das Zwei-Körper-Problem (kurz: 2KP) im Bezug auf Planetenbewegungen zu werfen.

2.1.1. Die Planetenbewegung als Ein-Körper-Problem

Bei einem 1KP geht man in der Physik von der Mechanik eines freien Massepunktes aus. Unter einen Massepunkt versteht man „einen physikalischen Körper mit einer Masse m , aber mit allseitig vernachlässigbarer Ausdehnung. Man beachte, dass es sich dabei nicht notwendig um einen kleinen Körper handeln muss“ ([Nolting, 2013], S.161). Im Sinne der Planetenbewegungen kann man auch von einem Planeten als Massepunkt auf einer kreisförmigen Umlaufbahn um die Sonne, die eine Kraft auf den Planeten ausübt, ausgehen. Oder von einem Mond beziehungsweise einem ähnlichen Satelliten, der sich um einen Planeten bewegt. Die soeben benannte Kraft ist die Gravitationskraft, eine Zentralkraft, die von einem größerem Körper mit Masse M auf den Massepunkt an einem Ort r wirkt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma \mathbf{r} \frac{mM}{r^3} \quad (2.1)$$

([Nolting, 2013], S.179). Dabei ist $\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$ die Gravitationskonstante (vgl. [Demtröder, 2015], S.64). Die Gravitationskraft ist konservativ, denn sie ist der Gradient des Gravitationspotentials

$$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r} \quad (2.2)$$

([Nolting, 2013], S. 252). Somit gilt auch der Erhalt von Energie und Drehimpuls, der in der folgenden Gleichung abgebildet ist:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2.3)$$

([Nolting, 2013], ebd.). Es wird $\frac{1}{r} = s$ substituiert (vgl. [Nolting, 2013], ebd.) und eine Funktion vom Winkel φ bestimmt

2. Theoretischer Hintergrund

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{d\varphi} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\varphi} && | \text{ Kettenregel} \\
 &= -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\varphi}} && | L = mr^2\dot{\varphi} \\
 &= -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{mr^2}{L},
 \end{aligned}$$

sodass $\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{ds}{d\varphi}$ und (2.3) geschrieben werden kann als

$$\frac{L^2}{2m} \left[\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] + \bar{V}(s) = E, \quad \bar{V}(s) = -\gamma m M s \quad (2.4)$$

(vgl. [Nolting, 2013], S.252 f.). Diese wird nach φ abgeleitet und umgestellt, sodass man die inhomogene Differentialgleichung (kurz: DGL) zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s = \gamma m^2 \frac{M}{L^2} \quad (2.5)$$

mit ihrer allgemeinen homogenen Lösung

$$s_h(\varphi) = \alpha \sin(\varphi) + \beta \cos(\varphi) \quad (2.6)$$

und einer partikulären Lösung $s_p(\varphi) = \gamma m^2 \frac{M}{L^2}$ erhält (vgl. [Nolting, 2013], S. 253). Die allgemeine Lösung von (2.5) lautet

$$s(\varphi) = s_h(\varphi) + s_p(\varphi) = \alpha \sin(\varphi) + \beta \cos(\varphi) + \gamma m^2 \frac{M}{L^2} \quad (2.7)$$

([Nolting, 2013], ebd.). Für α und β werden die Randbedingungen so festgelegt, dass der sonnennächste Punkt bei $\varphi = 0$ liegt - somit gilt $\alpha = 0$ und $\beta \leq 0$ ([Nolting, 2013], ebd.). Durch Rücksubstitution von $\frac{1}{r} = s$ und einsetzen ergibt sich die Bahnkurve

$$\frac{1}{r} = \beta \cos(\varphi) + \gamma m^2 \frac{M}{L^2}, \quad (2.8)$$

die durch die Substitutionen $k = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}$ und $\beta = \frac{\varepsilon}{k}$ einen Kegelschnitt beschreibt:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k} (1 + \varepsilon \cos(\varphi)) \quad (2.9)$$

(vgl. [Nolting, 2013], S.254). Für $\varepsilon < 1$ erhält man eine Ellipse, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel und für

2. Theoretischer Hintergrund

$\varepsilon < 1$ eine Hyperbel (vgl. [Nolting, 2013], S.254).

Weiterhin interessant sind die kosmischen Geschwindigkeiten. Dafür betrachtet man das effektive Potential

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \gamma \frac{mM}{r}; \quad (2.10)$$

wobei der Massepunkt nur Bereiche erreichen kann, die unter einer ausgewählten Energie E liegen, d.h. $V_{eff}(r) \leq E$ (vgl. [Nolting, 2013], S. 257). Die erste kosmische Geschwindigkeit ergibt sich durch Ableiten dieses Potentials, denn der Satellit bewegt sich kräftefrei um die Erde auf einer niedrigstmöglichen Kreisbahn:

$$\begin{aligned} V'_{eff}(r) = 0 &= -\frac{L^2}{mr^3} + \gamma \frac{mM}{r^2} && | + \frac{L^2}{mr^3} \\ \frac{L^2}{mr^3} &= \gamma \frac{mM}{r^2} && | \cdot mr^2 \\ \frac{L^2}{r} &= \gamma m^2 M && | L = mr^2 \varphi_1 = mrv_1 \\ m^2 r v_1^2 &= \gamma m^2 M && | : m^2 r \\ v_1^2 &= \frac{\gamma M}{r} && | \sqrt{\dots} \\ v_1 &= \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}. \end{aligned}$$

Die erste kosmische Geschwindigkeit der Erde beträgt $v_1 \approx 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ([Nolting, 2013], ebd.).

Für den Fall, dass der Satellit die Umlaufbahn der Erde verlassen soll, benötigt man die zweite kosmische Geschwindigkeit, auch Fluchtgeschwindigkeit genannt. Der Satellit muss eine Mindestenergie von $E = 0$ besitzen, sodass er auf der Erdoberfläche die potentielle Energie $mgR = -\gamma \frac{mM}{R}$ annimmt und nach Energiebilanz gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m}{2} v_2^2 - mgR && | + mgR \\ mgR &= \frac{m}{2} v_2^2 && | \cdot \frac{2}{m} \\ 2gR &= v_2^2 && | \sqrt{\dots} \\ v_2 &= \sqrt{2gR}. \end{aligned}$$

2. Theoretischer Hintergrund

Die erste kosmische Geschwindigkeit der Erde beträgt $v_2 \approx 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ([Nolting, 2013], ebd.).

2.1.2. Die Keplerschen Gesetze

Aus dem Umstand, dass sich der Planet auf einer elliptischen Umlaufbahn bewegt, also $E < 0$ sowie dem Drehimpuls- und Energieerhaltungssatz ergeben sich die Keplerschen Gesetze ([Nolting, 2013], S. 258):

Satz 2.1 (Keplersche Gesetze). *Die Keplerschen Gesetze lauten wie folgt:*

1. *Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.*
2. *Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*
3. *Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie Kuben der großen Achsen der Ellipsen.*

Entsprechende Herleitungen finden sich in [Bartelmann et al., 2018], S. 95 ff., [Demtröder, 2015], S. 62 ff., [Nolting, 2013], S. 254 f..

2.1.3. Die Planetenbewegung als Zwei-Körper-Problem

Nun wird das 1KP durch eine weitere Masse m_2 erweitert. Die beiden Massen m_1, m_2 besitzen die Ortsvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Zwischen ihnen wirkt außerdem die Gravitationskraft mit ihrem Potential nach (2.2):

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}, \quad (2.11)$$

sodass deren innere Kraft der Gleichung

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (2.12)$$

entspricht (vgl. [Nolting, 2013], S. 284). Es sei der Gesamtimpuls \mathbf{P} der beiden Massen konstant (Impulserhalt), sodass die Relativbewegung als ein effektives Ein-Körper-Problem betrachtet werden kann, welche sich auf einer festen Ebene befindet

$$\mu \mathbf{r}_{12}^{\ddot{}} = -\gamma \mu M \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2. \quad (2.13)$$

Somit gilt nach (2.3) für Relativenergie- und Relativdrehimpulserhaltung

2. Theoretischer Hintergrund

$$E_r = \frac{\mu}{2} \dot{r}_{12}^2 + \frac{L^2}{2\mu r_{12}^2} + V(r_{12}) \quad (2.14)$$

(vgl. [Nolting, 2013], S. 285). Die Lösung der DGL erfolgt analog zu 2.1.1 und man erhält die Kegelschnitte:

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{k_r} (1 + \varepsilon \cos(\varphi)), \quad k_r = \frac{L_r^2}{\gamma \mu^2 M}; \quad (2.15)$$

für $\varepsilon < 1$ erhält man also wieder eine Ellipse (vgl. [Nolting, 2013], ebd.). Da zwei Massen existieren, muss demnach der Nullpunkt in den Schwerpunkt gelegt werden und es gilt

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_{12}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_{12}, \quad (2.16)$$

damit die beiden Massen sich „auf geometrisch ähnlichen, gleichsinnig durchlaufenen Ellipsen um den gemeinsamen Schwerpunkt, der mit jeweils einem der beiden Brennpunkte einer jeden Ellipse zusammenfällt ([Nolting, 2013], S. 285 f.), bewegen. „Für die große Halbachse a_r der Ellipse der Relativbewegung gilt [...]“

$$a_r = -\frac{\gamma \mu M}{2E_r}, \quad (2.17)$$

([Nolting, 2013], S.286), sodass die beiden Massebahnen die Halbachsen

$$a_1 = -\frac{\gamma \mu m_2}{2E_r}, \quad a_2 = -\frac{\gamma \mu m_1}{2E_r} \quad (2.18)$$

besitzen, welche umgekehrt proportional zu den Massen sind (vgl. [Nolting, 2013], ebd.). In Massesystemen, wie z.B. Sonne-Erde, Erde-Mond, in denen die große Masse die kleine Masse um einige Größenordnungen übersteigt, kann somit die Bewegung der großen Masse vernachlässigt werden (vgl. [Nolting, 2013], ebd.).

2.2. Grundlegende Annahmen des Drei-Körper-Problems

2.2.1. Die Bewegungsgleichungen des restriktiv zirkulär planaren Drei-Körper-Problems

Das ebene kreisförmige restriktive Drei-Körper-Problem (im Folgenden: PCR3BP) stützt sich auf die folgenden Annahmen:

- Es existieren zwei massereiche Körper, z.B. Erde und Mond. Diese besitzen die Massen $m_E = 1 - \mu$ und $m_M = \mu$, sodass ihre Gesamtmasse auf 1 normiert ist. Sie bewegen

2. Theoretischer Hintergrund

sich im mathematischen Sinn um ihren gemeinsamen Masseschwerpunkt. Zur Vereinfachung passiert dies auf einer Ebene und die Bewegung ist eine kreisförmige.

- Weiterhin existiert ein dritter Körper, z.B. ein Raumschiff, dessen Masse im Vergleich zu den massereichen Körpern vernachlässigbar klein ist. Dieser bewegt sich frei auf der Ebene (vgl. [Koon et al., 1999], S. 1169).

Es wird ein Koordinatensystem so festgelegt, dass sich der Masseschwerpunkt im Ursprung und die massereichen Körper auf der x -Achse befinden. Deren Koordinaten lauten dann $(-\mu, 0)$ für die Erde und $(1 - \mu, 0)$ für den Mond. Die Koordinaten des Raumschiffs sind relativ zu Erde und Mond (x, y) . Die Bewegungsgleichungen für das Raumschiff lassen sich aus der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{(p_x + y)^2}{2} + \frac{(p_y - x)^2}{2} - \Omega(x, y) \quad (2.19)$$

bestimmen, wobei gilt

$$\Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2} \quad (2.20)$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2} \quad (2.21)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2} \quad (2.22)$$

und r_1, r_2 die jeweiligen Abstände des Raumschiffs zu Erde und Mond sind (vgl. [Koon et al., 1999], ebd.).

Zunächst gilt nach den hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \quad (2.23)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.24)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \quad (2.25)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (2.26)$$

Ausgerechnet ergibt sich für (2.23)

2. Theoretischer Hintergrund

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ &= p_x + y\end{aligned}$$

für (2.24)

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= p_y - x + \Omega_x\end{aligned}$$

für (2.25)

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ &= p_y - x\end{aligned}$$

für (2.26)

$$\begin{aligned}\dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ &= -p_x - y + \Omega_y.\end{aligned}$$

Dabei sind Ω_x, Ω_y die partiellen Ableitungen nach x, y . Setzt man (2.23) in (2.26) ein und (2.25) in (2.24), erhält man:

$$\dot{p}_x = \dot{y} + \Omega_x \quad (2.27)$$

$$\dot{p}_y = -\dot{x} + \Omega_y. \quad (2.28)$$

Gemäß des Lagrange-Formalismus werden die Gleichungen (2.23) und (2.25) nach p_x, p_y umgestellt und nach der Zeit abgeleitet

2. Theoretischer Hintergrund

$$\dot{p}_x = \ddot{x} - \dot{y} \quad (2.29)$$

$$\dot{p}_y = \ddot{y} + \dot{x}. \quad (2.30)$$

Stellt man jeweils die Gleichungen (2.27) und (2.29) sowie die Gleichungen (2.28) und (2.30) gegenüber, so ergeben sich die folgenden Bewegungsgleichungen für das Raumschiff:

$$\Omega_x = \ddot{x} - 2\dot{y} \quad (2.31)$$

$$\Omega_y = \ddot{y} + 2\dot{x}. \quad (2.32)$$

Wegen der Zeitunabhängigkeit von Ω gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \Omega_x \dot{x} + \Omega_y \dot{y} \\ &= \ddot{x}\dot{x} - 2\dot{x}\dot{y} + \ddot{y}\dot{y} + 2\dot{x}\dot{y} \\ &= \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}. \end{aligned}$$

Integriert nach der Zeit ergibt sich:

$$\Omega + E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2},$$

wobei E die Gesamtenergie darstellt. Die Formel

$$E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \Omega \quad (2.33)$$

wird auch das Jacobi-Integral genannt.

2.2.2. Die Gleichgewichtspunkte und die Hill-Umgebung

Das Differentialgleichungssystem (kurz: DGS) bestehend aus den Bewegungsgleichungen (2.13) und (2.14) verfügt über fünf Gleichgewichtspunkte. Diese werden auch die Lagrange-Punkte L_i genannt, benannt nach Joseph Louis Lagrange, der diese Lösungen fand (vgl. [Meyer & Offin, 2017]). Die ersten drei Punkte befinden sich wie die massereichen Körper auf der x -Achse, die anderen beiden bilden jeweils zusammen mit den größeren Körpern ein gleichseitiges Dreieck. Die Positionen der Lagrange-Punkte lauten folgendermaßen (vgl. [Abraham &

2. Theoretischer Hintergrund

Marsden, 2008], S. 678 ff.):

1. $L_1 = (1 - \mu - \rho_1, 0)$ mit ρ_1 als reelle Nullstelle der Gleichung:

$$\rho^5 - (3 - \mu)\rho^4 + (3 - 2\mu)\rho^3 - \mu\rho^2 + 2\mu\rho - \mu = 0$$

2. $L_2 = (1 - \mu + \rho_2, 0)$ mit ρ_2 als reelle Nullstelle der Gleichung:

$$\rho^5 + (3 - \mu)\rho^4 + (3 - 2\mu)\rho^3 - \mu\rho^2 - 2\mu\rho - \mu = 0$$

3. $L_3 = (1 - \mu - \rho_3, 0)$ mit ρ_3 als reelle Nullstelle der Gleichung:

$$\rho^5 - (3 - \mu)\rho^4 + (3 - 2\mu)\rho^3 + (\mu - 2)\rho^2 + 2\mu\rho - \mu = 0$$

4. $L_4 = (\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$

5. $L_5 = (\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Für das System Erde-Mond wird $\mu = 0.05$ angenommen (nach persönlicher Absprache mit Herrn Prof. Dr. Pikovsky, 21.10.2021). Die Gleichungen 1 - 3 werden numerisch via Maxima gelöst. Daher sind für das System die Lagrange-Punkte (dargestellt in Abbildung 1):

1. $L_1 = (0.72, 0)$

2. $L_2 = (1.23, 0)$

3. $L_3 = (-1.02, 0)$

4. $L_4 = (0.45, \frac{\sqrt{3}}{2})$

5. $L_5 = (0.45, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

2. Theoretischer Hintergrund

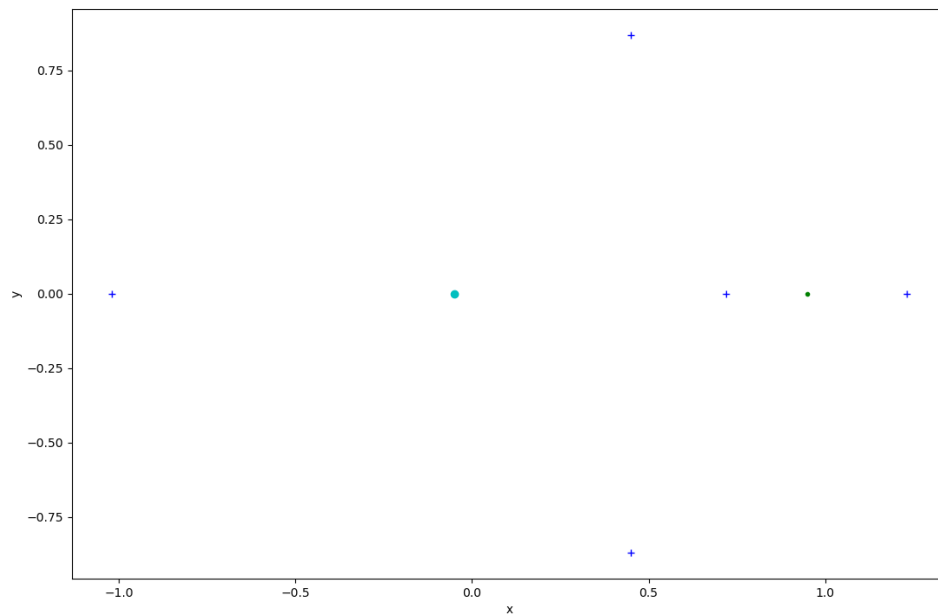


Abbildung 1: Darstellung der Lagrange-Punkte (blau) im System Erde (cyan)-Mond (grün) (eigener Plot)

Die Lagrange-Funktion nimmt für die Punkte L_1, L_2 die folgenden Werte an (gerundet):

$$\Omega_1 = 1,77$$

$$\Omega_2 = 1,76.$$

Alle Punkte, an denen die Lagrange-Funktion einen Wert größer gleich dem Jacobi-Integral annimmt, gehören der Hill-Region an. Diese ist für ein Raumschiff der Energie E erreichbar (vgl. [Koon et al., 1999], S.1169). In Abbildung 2 sind einige Hill-Regionen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass für den Energiebetrag von 1.7 eine Enge erkennbar ist, die einen Zugang von der Erde zum Mond und wieder zurück erlaubt.

2. Theoretischer Hintergrund

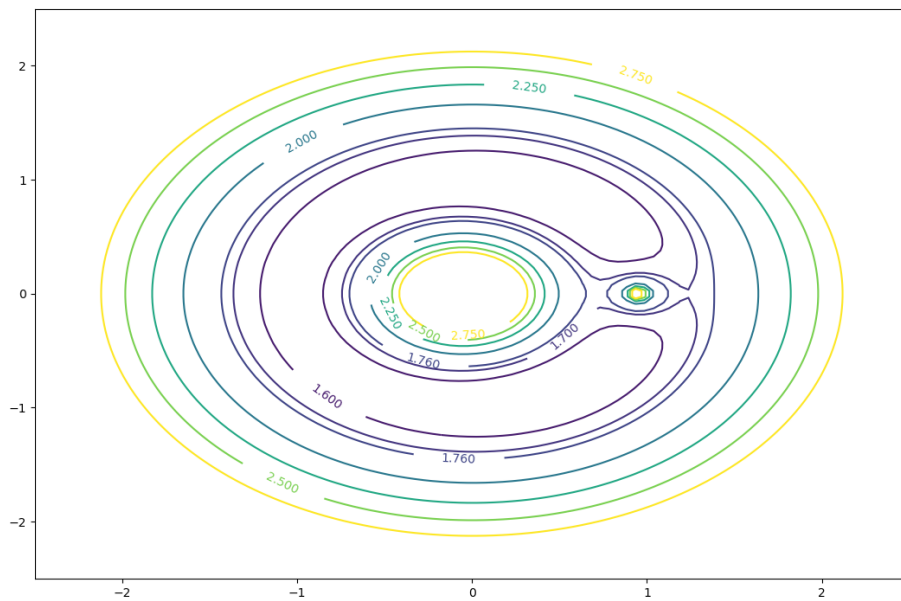


Abbildung 2: Darstellung der Hill-Regionen im System Erde-Mond für bestimmte Energieniveaus (eigener Plot)

2.3. Chaostheoretische Aspekte des Drei-Körper-Problems

Das PCR3BP ist ein außerdem deterministisches Problem „d.h. die Gleichungen enthalten keine stochastischen Glieder. Weiterhin legt der Anfangszustand die Lösung zumindest lokal eindeutig fest. Das heißt insbesondere, daß sich zwei Bahnkurven niemals schneiden können“ ([Argyris et al., 2017], S. 15). Aus der Herleitung der Bewegungsgleichungen für das PCR3BP wird ersichtlich, dass es sich hierbei um nichtlineare DGLen handelt, denn diese beinhalten nichtlineare Terme wie z.B. einen Wurzelterm, siehe (2.20), dessen Ableitung weiterhin einen Wurzelterm ergibt. Solche Terme sind es auch, die für die Instabilität der Lösungen zuständig sind (vgl. [Demtröder, 2015], S. 389). Die Lösungen wären stabil, „[w]enn kleine Abweichungen von den Anfangsbedingungen auch nur kleine Änderungen in der zukünftigen Entwicklung des Systems verursachen“ ([Demtröder, 2015], S. 388). Das heißt, dass instabile Lösungen eine kleine Abweichung der Anfangswerte, aber dafür große Abweichungen in ihrem weiteren Verhalten haben (vgl. [Demtröder, 2015], S. 389). Bezogen auf das PCR3BP kann das bedeuten, dass eine Abweichung in der Startgeschwindigkeit oder dem Startort eine völlig andere Trajektorie hervorbringt. „Wenn solche Terme zu instabilen Entwicklungen des Systems führen, sprechen wir vom chaotischen Verhalten“ ([Demtröder, 2015], ebd.).

2. Theoretischer Hintergrund

Damit ist das PCR3BP ein chaotisches Problem. Weiterhin gilt für nichtlineare Systeme das Superpositionsprinzip nicht mehr (vgl. [Demtröder, 2015], ebd.). Im 3KP überlagern sich also die Gravitationskräfte, wie auch im 2KP. Doch dieser dritte zusätzliche Körper mit seiner Gravitationskraft führt dazu, dass die Lösungen der Bewegungsgleichungen aber nicht mehr dem Prinzip $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ folgen.

In der Chaostheorie spielen auch Fraktale eine Rolle. Fraktale sind „komplexe geometrische Objekte, welche vorwiegend in den Natur- und physikalischen Wissenschaften vorkommen. [...] Die meisten fraktalen Objekte sind von Natur aus selbstähnlich- (übersetzt aus [Layek, 2015], S. 575), was bedeutet, dass eine analoge Struktur in einem vergrößerten Teil des Objekts auftritt (vgl. [Layek, 2015], ebd.). Dabei ist zu beachten, dass natürlich entstehende Fraktale nicht exakt, sondern nur annähernd selbstähnlich sind (vgl. [Layek, 2015], S. 583). Im Kapitel 3 wird im Bezug auf das PCR3BP näher darauf eingegangen.

2.4. Das Runge-Kutta-Verfahren und die Schrittweitensteuerung

Da das PCR3BP nicht auf analytischem Wege gelöst werden kann, zieht man hier die numerische Annäherung der Lösung in Betracht (vgl. [von Kusserow, 2018], S.192). Für die angenäherte Lösung des PCR3BP werden die Runge-Kutta-Verfahren (kurz: RKV) und/oder die daran anknüpfende Schrittweitensteuerung genutzt.

2.4.1. Einschrittverfahren

Die RKV sind sogenannte Einschrittverfahren. Die angenäherte Lösung der DGL lässt sich über die Vorschrift

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^s b_j f(t_i + c_j h, \eta_j) \quad (2.34)$$

berechnen, wobei h die Schrittweite zwischen den Zeiten t_i und t_{i+1} darstellt, b_j als die Gewichte, die in ihrer Summe 1 ergeben, c_j als die Knoten des Verfahrens und s als die Stufenzahl (vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], S.566). Es wird zwischen den expliziten Einschrittverfahren und den impliziten unterschieden. Die expliziten Einschrittverfahren berechnen y_{i+1} direkt aus dem vorherigen y_i (siehe (2.34)), während die impliziten y_{i+1} in ihrer Rechenvorschrift enthalten und der Wert über andere Wege berechnet werden muss.

Beispiel 2.2. Als Minimalbeispiel seien das explizite und das implizite Eulerverfahren gegeben. Das explizite Eulerverfahren lässt sich durch

2. Theoretischer Hintergrund

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

berechnen (vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], S. 557), während im impliziten Eulerverfahren

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

gerechnet wird und dieses über die Lösung eines (nichtlinearen) Gleichungssystems bestimmt wird (vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], S. 561).

2.4.2. Runge-Kutta-Verfahren

In der Gleichung (2.34) ist auch ein η_j zu sehen. Dieses lässt sich für alle $j = 1, \dots, s$ über

$$\eta_j = y_i + h \sum_{\nu=1}^s a_{j\nu} f(t_i + c_\nu h, \eta_\nu), \quad \sum_{\nu=1}^s a_{j\nu} = c_j \quad (2.35)$$

(vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], S. 570) berechnen, wobei für ein explizites RKV für alle $\nu \geq j$ $a_{j\nu} = 0$ sein muss, anderenfalls handelt es sich um ein implizites RKV (vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], ebd.). Setzt man alle $a_{j\nu}$ als Einträge der $s \times s$ -Matrix A sowie alle b_j und c_ν als Einträge der Spaltenvektoren b und c , können diese im sogenannten Butcher-Tableau angeordnet werden, welches schematisch folgendermaßen aussieht:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline b^T & \end{array} = \begin{array}{c|ccc} c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

(vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], ebd.). „Ein s -stufiges explizites RKV hat höchstens die Konsistenzordnung $q = s$ “, ([Hanke-Bourgeois, 2009], S. 574) was bedeutet, dass der lokale Fehler, berechnet aus $y(t_{i+1}) - y_{i+1}$, nicht schneller als h^{s+1} wächst (vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], S. 569). Implizite RKV hingegen haben eine maximale Konsistenzordnung von $q = 2s$ (vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], S. 592).

Beispiel 2.3. Betrachtet man das Minimalbeispiel 2.2, so ergeben sich die Butcher-Tableaus

2. Theoretischer Hintergrund

für das explizite und implizite Eulerverfahren (v.l.n.r.):

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Die Ordnungen der Eulerverfahren belaufen sich auf 1 (vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], S.568).

2.4.3. Schrittweitensteuerung

Das gewählte RKV soll nicht nur so genau wie möglich, sondern auch so wenig wie möglich zeitaufwändig sein. Dafür ist es notwendig, eine geeignete Schrittweite h , zu wählen, die das ermöglicht. Hierfür bedient man sich an einem sogenannten eingebetteten RKV, welches aus Effizienzgründen dieselben Koeffizienten $a_j\nu$ und Knoten c_j nutzt, aber die Gewichte \hat{b}_j so gewählt werden, dass die Ordnung $q+1$ beträgt und zusätzlich zur Gleichung (2.34) die folgende Formel genutzt wird (vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], S. 608):

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^s \hat{b}_j f(t_i + c_j h, \eta_j). \quad (2.36)$$

Die Steigungen werden weiter nach (2.35) berechnet (vgl. [Hanke-Bourgeois, 2009], ebd.).

Für die Konstruktion eines Kontrollverfahrens wird der Fehlberg-Trick benutzt: „Fehlberg hat vorgeschlagen, als zusätzliche Stufe die erste Stufe des folgenden Zeitschritts zu verwenden“ ([Hanke-Bourgeois, 2009], S. 610), sodass die Bedingungen $c_s = 1$, $b_s = 0$ und $a_s\nu = b_j$ für $j = 1, \dots, s - 1$ erfüllt ist (vgl. [Deuflhard & Bornemann, 2013], S. 216). Somit kann für die Bestimmung der weiteren Gewichte ein lineares Gleichungssystem genutzt werden.

Beispiel 2.4. Das bekannteste Verfahren, welches auch in dieser Arbeit zum Tragen kommt, ist das Dormand-Prince-Verfahren (kurz: DPV) vom Typ RK5(4) mit 6 Stufen (vgl. [Deuflhard & Bornemann, 2013], S.217):

2. Theoretischer Hintergrund

| | | | | | | | |
|-------------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|--------------------|-------------------------|--------------------|----------------|
| 0 | | | | | | | |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | | | | | | |
| $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{40}$ | $\frac{9}{40}$ | | | | | |
| $\frac{4}{5}$ | $\frac{44}{45}$ | $-\frac{56}{15}$ | $\frac{32}{9}$ | | | | |
| $\frac{8}{9}$ | $\frac{19372}{6561}$ | $-\frac{25360}{2187}$ | $\frac{64448}{6561}$ | $-\frac{212}{729}$ | | | |
| 1 | $\frac{9017}{3168}$ | $-\frac{355}{33}$ | $\frac{46732}{5247}$ | $\frac{49}{176}$ | $-\frac{5103}{18656}$ | | |
| 1 | $\frac{35}{384}$ | 0 | $\frac{500}{1113}$ | $\frac{125}{192}$ | $-\frac{2187}{6784}$ | $\frac{11}{84}$ | |
| \hat{b}_j für $q = 5$ | $\frac{35}{384}$ | 0 | $\frac{500}{1113}$ | $\frac{125}{192}$ | $-\frac{2187}{6784}$ | $\frac{11}{84}$ | 0 |
| b_j für $q = 4$ | $\frac{5179}{57600}$ | 0 | $\frac{7571}{16695}$ | $\frac{393}{640}$ | $-\frac{92097}{339200}$ | $\frac{187}{2100}$ | $\frac{1}{40}$ |

Algorithmus 1 : Schrittweitensteuerung nach [Hanke-Bourgeois, 2009], S. 609

Eingabe : RKV der Ordnungen $q, q + 1$ mit Zeitschritt t_i und Startschrittweite h ;

Fehlertoleranz ϵ ; Toleranzparameter τ , Intervall $[t_0; T]$

Ausgabe : Genaueste Annäherung der Lösung der DGL mit wenigen Zeitschritten im Intervall $[t_0, T]$

$\delta \leftarrow \epsilon$;

solange $t_{i+1} \leq T$:

für $i = 0, 1, 2, \dots$:

solange $\delta > \epsilon$:

$h \leftarrow h\tau \left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{q+1}}$;

$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^s b_j f(t_i + c_j h, \eta_j)$;

$\hat{y}_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^s \hat{b}_j f(t_i + c_j h, \eta_j)$;

$\delta \leftarrow \|y_{i+1} - \hat{y}_{i+1}\|$;

$t_{i+1} \leftarrow t_i + h$;

Der Algorithmus 1 für die Schrittweitensteuerung ist so aufgebaut, dass der lokale Fehler anfangs der Fehlertoleranz ϵ zugordnet wird. Solange sich die Zeitschritte im Intervall $[t_0, T]$ bewegen, werden alle Schritte berechnet. Dafür muss im Rechenweg mit h gestartet werden, wobei nach (2.34) und (2.36) die Stellen y_{i+1}, \hat{y}_{i+1} berechnet werden. Der neue lokale Fehler δ ist die Betragsnorm der Differenz der beiden Stellen. Die Prozedur wird solange wiederholt, bis $\delta \leq \epsilon$ ist. Somit wird dann der neue Zeitschritt bestimmt. Das Verfahren ist beendet, sobald das Intervallende T erreicht ist.

Beispiel 2.5. Um das PCR3BP und die RKV miteinander zu vernetzen sowie die RKV ohne Schrittweitensteuerung mit denen mit Schrittweitensteuerung zu vergleichen, betrachte man die folgenden AWP mit $\mu = 0,012277471$:

2. Theoretischer Hintergrund

$$1. \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,04935750983 \end{pmatrix}, T \approx 6,19217$$

$$2. \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,994 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2,00158510637908252240537862224 \end{pmatrix}, T \approx 17,065217$$

$$3. \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,994 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2,0317326295573368357302057924 \end{pmatrix}, T \approx 11,12434$$

Die Annäherung deren Lösung soll mithilfe des klassischen RKV mit den Schrittweiten $h_1 = 0,01$, $h_2 = 0,001$ und $h_3 = 0,0001$ sowie mit dem DPV mit Schrittweitensteuerung ($h_0 = 0,001$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $\tau = 0,8$) berechnet werden (nach einem Übungsblatt von Frau Prof. Dr. Böckmann, 24.06.2020). In den Tabellen 1, 2 und 3 werden die Verfahren mit der Anzahl der Schritte und dem Fehler am Ort nach Beendigung des Verfahrens aufgelistet. Weiterhin sind in den Abbildungen 3, 4 und 5 die Plots dieser drei Probleme dargestellt. Es ist in allen drei Versionen des PCR3BP durch die großen Fehler und auch das Verlassen der Flugbahnen erkennbar, dass die Schrittweite h_1 zu groß für die Lösungsverfahren ist. Für die RKV mit den Schrittweiten h_2 und h_3 sind die Flugbahnen wesentlich exakter, was auch die geringen Fehler zeigen. Nur für das erste PCR3BP weist das DPV eine geringere Genauigkeit als das RKV für die Schrittweite h_3 auf. Bei den anderen sind sowohl die Anzahl der Schritte als auch der Fehler geringer.

| Verfahren | Anzahl der Schritte | Fehler Δy (gerundet) |
|----------------------|---------------------|------------------------------|
| RKV mit $h = 0,01$ | 619 | 12,84249 |
| RKV mit $h = 0,001$ | 6192 | 0,00328 |
| RKV mit $h = 0,0001$ | 61921 | 0,00284 |
| DPV | 96573 | 0,003 |

Tabelle 1: Vergleiche der Verfahren im Bezug auf die erste Version der PCR3BP (eigene Berechnung)

| Verfahren | Anzahl der Schritte | Fehler Δy (gerundet) |
|----------------------|---------------------|------------------------------|
| RKV mit $h = 0,01$ | 1706 | 16,98294 |
| RKV mit $h = 0,001$ | 17065 | 0,00682 |
| RKV mit $h = 0,0001$ | 170652 | 0,00017 |
| DPV | 42562 | $7,2429 \cdot 10^{-8}$ |

Tabelle 2: Vergleiche der Verfahren im Bezug auf die zweite Version der PCR3BP (eigene Berechnung)

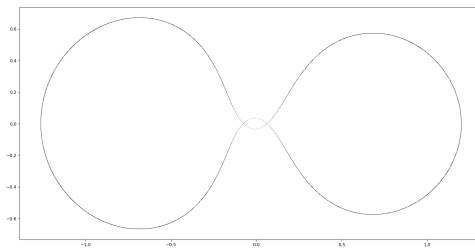
2. Theoretischer Hintergrund

| Verfahren | Anzahl der Schritte | Fehler Δy (gerundet) |
|----------------------|---------------------|------------------------------|
| RKV mit $h = 0,01$ | 1112 | 77,51442 |
| RKV mit $h = 0,001$ | 11124 | 0,00554 |
| RKV mit $h = 0,0001$ | 111243 | 0,00012 |
| DPV | 43155 | $1,26325 \cdot 10^{-6}$ |

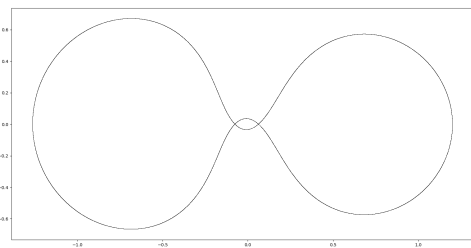
Tabelle 3: Vergleiche der Verfahren im Bezug auf die dritte Version der PCR3BP (eigene Berechnung)



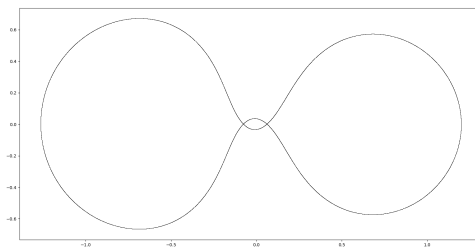
(a) RKV mit $h = 0,01$



(b) RKV mit $h = 0,001$



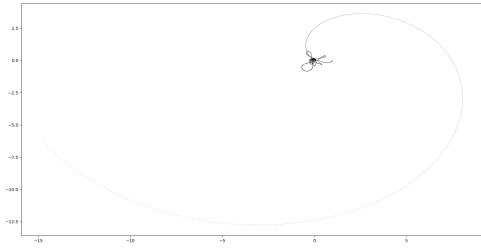
(c) RKV mit $h = 0,0001$



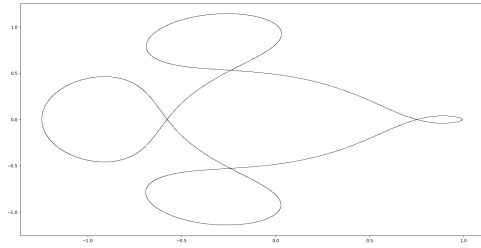
(d) DPV

Abbildung 3: Plots der Näherungen des ersten PCR3BPs (eigene Plots)

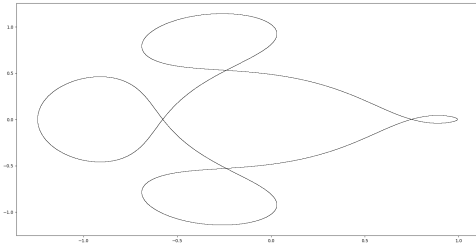
2. Theoretischer Hintergrund



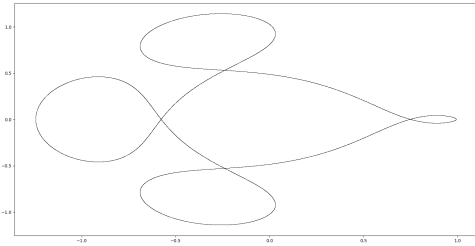
(a) RKV mit $h = 0,01$



(b) RKV mit $h = 0,001$

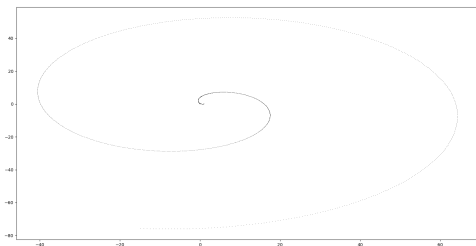


(c) RKV mit $h = 0,0001$

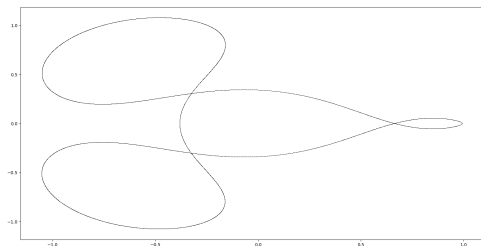


(d) DPV

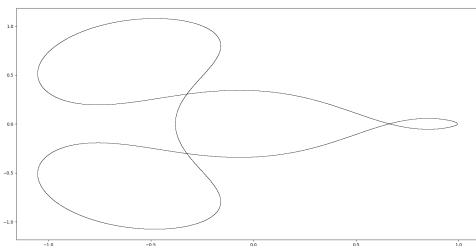
Abbildung 4: Plots der Näherungen des zweiten PCR3BPs (eigene Plots)



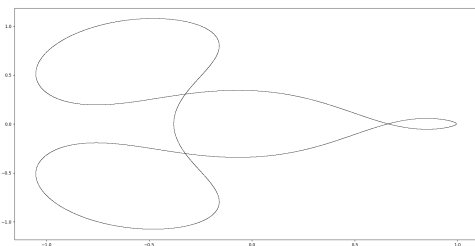
(a) RKV mit $h = 0,01$



(b) RKV mit $h = 0,001$



(c) RKV mit $h = 0,0001$



(d) DPV

Abbildung 5: Plots der Näherungen des dritten PCR3BPs (eigene Plots)

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

3.1. Zu untersuchende Fragen und Hypothesen

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Richtung der Startgeschwindigkeit und den Trajektorien?

Vermutung: Im folgenden Experiment sollen nicht nur die Trajektorien zwischen Erde und Mond veranschaulicht werden, sondern auch die Abhängigkeit dieser von der Richtung der Geschwindigkeit. Konkret werden die Anzahl der Umrundungen um den Mond und die Dauer des Fluges untersucht. Da das PCR3BP als Problem der nichtlinearen Dynamik und Chaostheorie gilt, für das es noch keine analytische Lösung gibt, ist davon auszugehen, dass eine Abhängigkeit der Trajektorien ebenfalls noch nicht analytisch beschrieben werden kann. Die entstandenen Graphen könnten Fraktale sein, welche in der Gesamtansicht mindestens einen Hauptpeak aufweisen können, also für einen Winkel die meisten Umrundungen erzielt werden können.

Hypothese 3.1. Die Abhängigkeit der Umrundungen um den Mond vom Startwinkel kann nicht analytisch beschrieben werden, sondern in Form eines Fraktals.

Hypothese 3.2. Die Abhängigkeit der Trajektorienlaufzeit vom Startwinkel kann nicht analytisch beschrieben werden, sondern in Form eines Fraktals.

Besteht ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der Umrundungen um den Mond und der Dauer der Trajektorien?

Vermutung: Auch hier kann man vermuten, dass da kein genauer Zusammenhang besteht, sondern ein Muster – wenn der Peak der Umrundungen erreicht ist, wird es auch ein Peak bei diesem Winkel geben. Allerdings kann es passieren, dass z.B. die Erde nochmals umrundet wird (was hier man hier nicht mitzählt) und bei zwei dicht benachbarten Winkeln zwar eine gleiche Umrundungsanzahl um den Mond existiert, aber die Flugdauer einen größeren Betragsunterschied aufweist.

Hypothese 3.3. Die Laufzeit und die Anzahl der Umrundungen um den Mond besitzen einen ähnlichen Verlauf in Abhängigkeit des Startwinkels.

3.2. Implementierung des Drei-Körper-Problems im System Erde-Mond

Aus dem Kapitel 2.4 wird ersichtlich, dass es eine Vielzahl an Möglichkeiten gibt, die Lösungskurve des PCR3BP zu plotten. Da die Schrittweitensteuerung im Vergleich eine höhere Genauigkeit bietet (siehe Beispiel 2.5), wird in Betracht gezogen, die Implementierung des PCR3BP über das DPV mit der Schrittweitensteuerung weiterzuführen und zu erweitern. Für das Modell Erde - Mond werden die folgenden Werte (dimensionslos) angenommen:

- $\mu = 0.05$
- $r_{Mond} = 0.01$
- $r_{Erde} = 0.2$

(Arbeitsblatt von Herrn Prof. Dr. Pikovsky, 24.08.2020). Aufbauend auf dem Quellcode B.2 wird die relative Masse verändert. Der Flugkörper startet auf der Erde. Daher muss der Startpunkt ein Punkt sein, der zum Massenmittelpunkt der Erde den Radius r_{Erde} einhält. Weiterhin soll der Flugkörper im System Erde-Mond bleiben, d.h. nicht verlassen, daher muss die Startgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Energie Ω (2.20) und dem Jacobi-Integral (2.33) gewählt werden. Die kleinste geschlossene Hillregion, die noch einen Flug von der Erde zum Mond erlaubt, hat ihre Grenze bei $E = 1,71$. Der Geschwindigkeitsbetrag ist demnach:

$$v_0 = \|\mathbf{v}_0\| = \sqrt{\dot{y}_{0,1}^2 + \dot{y}_{0,2}^2} = \sqrt{2\Omega_0 - 1.71}, \quad (3.1)$$

wobei Ω_0 von der Startposition \mathbf{y}_0 abhängt. Hier ist $\mathbf{y}_0 = (0.15, 0)$. Für die Codes B.3 und B.4 ist nicht nur der Geschwindigkeitsbetrag, sondern auch die Geschwindigkeitsrichtung wichtig. Um insbesondere für die Simulation B.4 eine ständige manuelle Eingabe von $\dot{y}_{0,1}$ und $\dot{y}_{0,2}$ zu vermeiden, bietet es sich an, mit dem Einheitskreis zu arbeiten und die beiden Geschwindigkeiten über einen Winkel w in Grad zusammenzufassen. Zum Start des Programmes wird w als Gleitkommazahl eingegeben, damit die Simulation die Bahnen bestimmen kann. Damit ist der Geschwindigkeitsvektor wie folgt gegeben:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\left(\frac{w \cdot \pi}{360}\right) \\ v_0 \cdot \sin\left(\frac{w \cdot \pi}{360}\right) \end{pmatrix}.$$

Für die Datensammlungen, erzeugt durch B.4, in denen die Flugbahn in Abhängigkeit mehrerer solcher Winkel in verschiedenen Schrittweiten aufgenommen wird, schafft die folgende while-Schleife Abhilfe:

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

```
while w < v:  
    t = 0  
    i = 0  
    j = 0  
    y=[yort , [ velocity *math.cos(w*math. pi/360) ,  
              ↪ velocity *math.sin(w*math. pi/360) ]]  
    [...]  
    w = w + ((v - u) / n) ,
```

wobei es sich bei \mathbf{y}_{ort} um den gleichen Startvektor: $\mathbf{y}_{\text{ort}} = \mathbf{y}_0 = (0.15, 0)$ handelt. Um die Abbildung auf ein geeignetes Intervall zu begrenzen, wird vor Programmstart der Intervallbeginn u sowie das Intervallende v eingegeben. Gleichzeitig wird vor Schutz einer Überschreitung u an eine Hilfsvariable w übergeben, die nach der gefundenen Trajektorie um die Schrittweite $\frac{v-u}{n}$ erhöht wird. Das n in der Formel sind die Anzahl der Punkte, die im Graphen abgebildet werden sollen.

Um zu verhindern, dass der Flugkörper durch Erde und Mond fliegt, muss eine if-Bedingung eingebaut werden, die das Programm stoppt, sobald der Radius zur Erde bzw. zum Mond erreicht ist. Das wird über

```
#Definiere Abhaengigkeit vom Radius Erde  
def r(y):  
    return (y[0][0]+0.05)**2+y[0][1]**2  
  
#Definiere Abhaengigkeit vom Radius Mond  
def R(y):  
    return (y[0][0]-0.95)**2+y[0][1]**2
```

sowie über

```
if r(y) < 0.04:  
    print ("Trajektorie", j, "bei_Anstiegswinkel", w, "  
          ↪ Landung_auf_der_Erde_nach_Zeit", t, "Anzahl_der_  
          ↪ Schritte:", i)  
    break  
  
elif R(y) < 0.0001:  
    print ("Trajektorie", j, "bei_Anstiegswinkel", w, "  
          ↪ Landung_auf_dem_Mond_nach_Zeit", t, "Anzahl_der_
```

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

```
    ↪ Schritte : " , i )  
    break
```

ermöglicht. Weiterhin müssen die Umrundungen um den Mond gezählt werden. Dafür wird die Hilfsmatrix x generiert, die die vorhergehende Matrix y übernimmt. Somit wird der Übertritt der y -Achse gekennzeichnet. Wenn sich das Flugobjekt auf der x -Achse im Intervall (0.96, 1.18) befindet, wird das Vorzeichen des Produktes des alten und neuen Ortswertes im vertikalen Bereich überprüft. Ist dieses negativ, so liegt ein Vorzeichenwechsel vor und die Umrundung j wird gezählt.

Zusammenfassend haben die Programme unterschiedliche Funktionen:

- Das Programm B.3 simuliert die Trajektorien des Flugobjekts im System Erde-Mond.
- Mit dem Programm B.4 werden zum einen die Umrundungen um den Mond und die Gesamtzeiten der Trajektorien in Abhängigkeit vom Startwinkel dargestellt. Die Trajektorien, die auf der Erde enden, werden in rot, diejenigen, die auf dem Mond enden, werden in blau abgebildet.

Die Durchführung der Simulation B.4 läuft wie folgt ab: Nach der Eingabe des Intervalls, in denen sich die Startwinkel befinden, und der Zahl der Schritte werden die Daten (Startwinkel, Trajektorienkategorie, Ort der Landung, Dauer der Trajektorie) im Pythonfile gesammelt und abschließend in den zwei oben genannten Diagrammen ausgegeben. Möchte man sich einen Bereich näher ansehen, so kann man mit Hilfe des Pythonfiles das kleinere Intervall präzise bestimmen und die Simulation von vorne starten, so dass beide Diagramme den gleichen Definitionsbereich erhalten. Um sich die Flugbahnen zu veranschaulichen und miteinander vergleichen zu können, wird der gewünschte Startwinkel aus dem zuvor generierten Pythonfile in die Simulation B.3 eingegeben. Am Ende wird die Flugbahn zwischen Erde und Mond, die Hillregion, Erde und Mond sowie die Lagrange-Punkte geplottet.

3.3. Auswertung der ermittelten Daten

Um einen Überblick zu erhalten, welche Bereiche näher betrachtet werden müssen, werden die Diagramme für die Trajektorienkategorien und die Umlaufzeit in Abhängigkeit von dem Startwinkel im gesamten Intervall (0 Grad, 360 Grad) in 360 Schritten aufgenommen (Abbildung 6). Man sieht, dass zwischen 156 Grad und 173 Grad für die Trajektorienkategorien ein Peak zu sehen ist - in diesen Bereich wird in 1000 Schritten gezoomt (Abbildung 7). Der Zoom

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

hat ergeben, dass es sich bei dem einen Peak um zwei Peaks um 160 Grad bzw. 170,1 Grad handelt. Diese Bereiche werden näher betrachtet, dabei werden die Trajektorienkategorien, die über den Startwinkel konstant bleiben, nicht weiter beachtet (Abbildungen 8 und 9). Es ist erkennbar, dass sich dort, wo sich die Peaks befinden auch für die Laufzeit über den Startwinkel ebenso Peaks befinden.

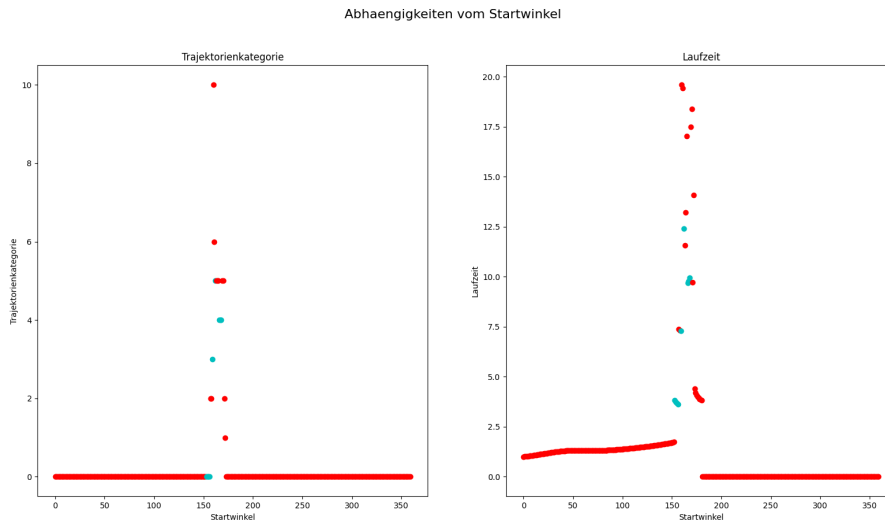


Abbildung 6: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 0-360 Grad (eigener Plot)

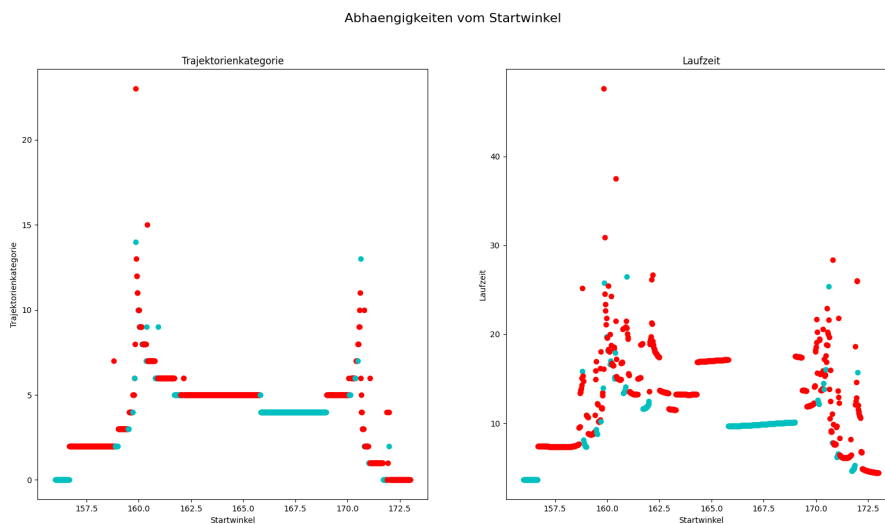


Abbildung 7: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 156-173 Grad (eigener Plot)

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

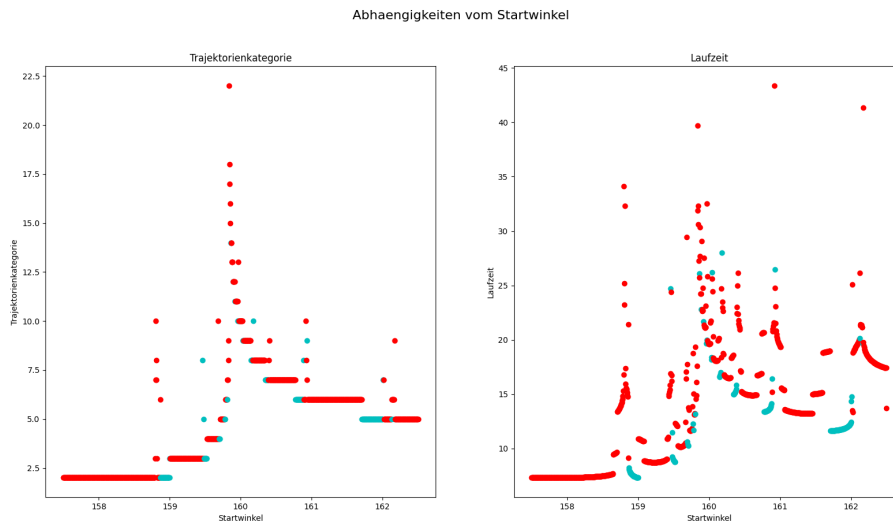


Abbildung 8: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 157,5-162,5 Grad (linker Hauptpeak) (eigener Plot)

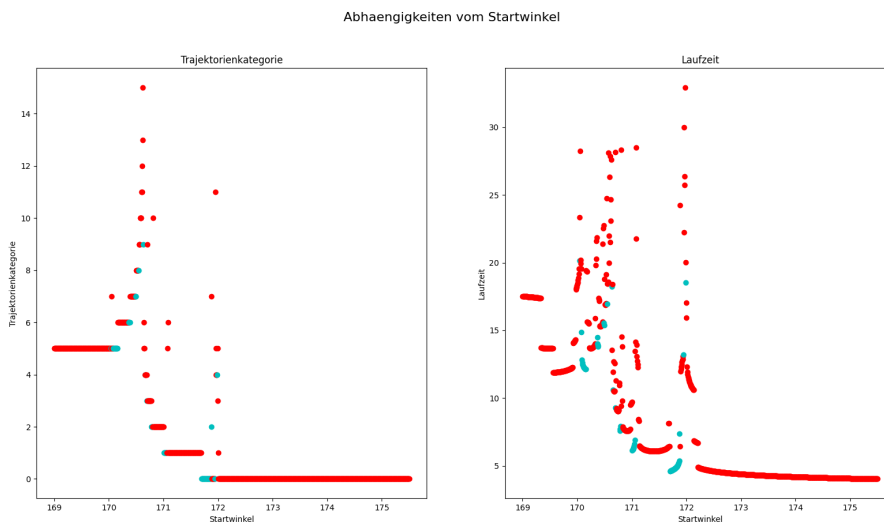


Abbildung 9: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 169-175,5 Grad (rechter Hauptpeak) (eigener Plot)

Zunächst werden die drei kleineren Peaks aus dem Bereich des linken Hauptpeaks betrachtet (Abbildung 8). Diese befinden sich im Bereich von

1. 158,78-158,875 Grad (Abbildung 10)
2. 160,87-160,945 Grad (Abbildung 11)

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

3. 161,995-162,175 Grad (Abbildung 12).

Weiterhin wird der linke Hauptpeak auf den Bereich von 159,45-160,415 Grad gezoomt (Abbildung 13). Hier werden weitere Nebenpeaks erkennbar.

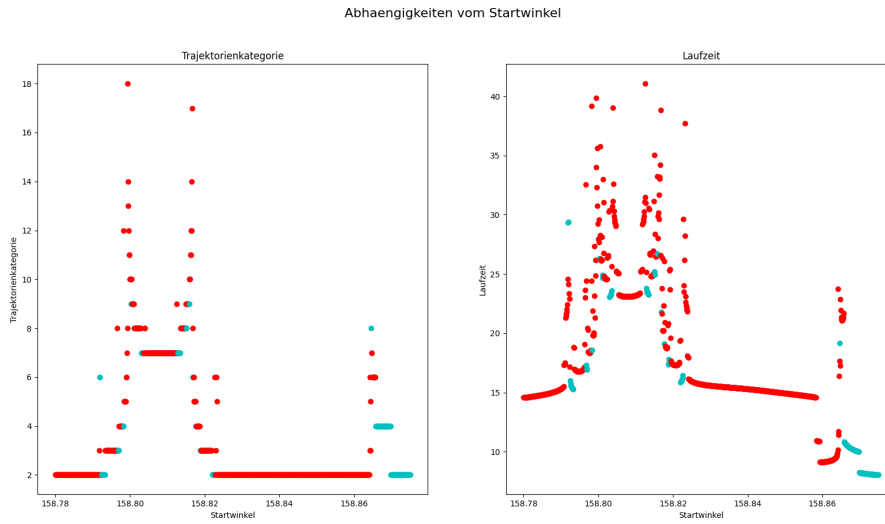


Abbildung 10: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 158,78-158,875 Grad (eigener Plot)

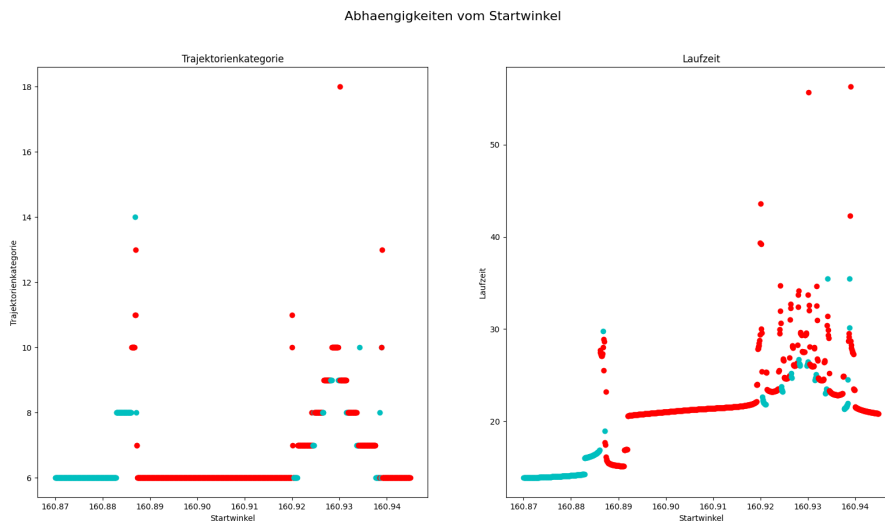


Abbildung 11: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 160,87-160,945 Grad (eigener Plot)

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

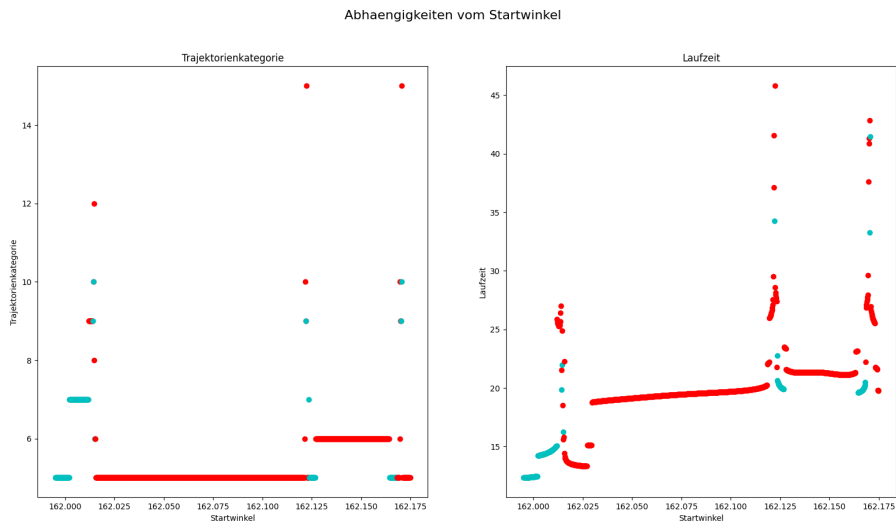


Abbildung 12: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 161,995-162,175 Grad (eigener Plot)

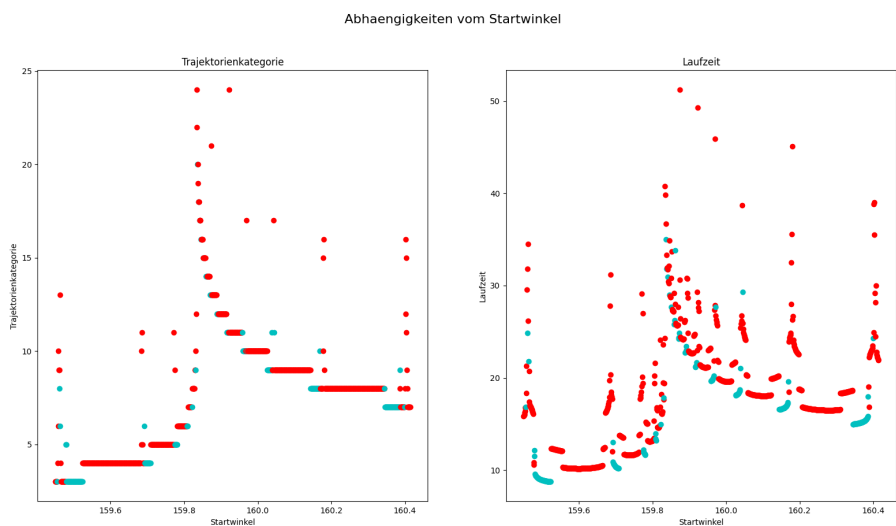


Abbildung 13: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 159,45-160,415 Grad (linker Hauptpeak) (eigener Plot)

Der erste Nebenpeak setzt sich aus einem Doppelpeak, wie er auch im ursprünglichen Bereich existiert, und einem anderen Peak, den es näher zu betrachten gilt (Abbildung 14), zusammen. Letzterer hat keinen Nachbarpeak, steht also allein für sich und läuft nach rechts aus. Auch die anderen beiden Peaks setzen sich aus einem Einzelpeak, die jedoch nach links auslaufen (Abbildungen 15 und 16), sowie einem Doppelpeak zusammen, die sich jedoch zum

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

ersten Doppelpeak in ihrer Form unterscheiden. In Abbildung 16 erkennt man, dass sich dieser Doppelpeak aus einem nach rechts auslaufendem und einen nach links auslaufenden Peak zusammensetzt, also kein Doppelpeak, wie er in den sonstigen Plots dargestellt ist, ist. Auch im Plot in Abbildung 17 handelt es sich nicht um einen Doppelpeak. Diese Peaks bestehen aus mehreren einzelnen Peaks, die zum nach dem Aufstieg in eine neue Trajektorienkategorie oder vor dem Abstieg in eine neue Trajektorienkategorie auftreten.

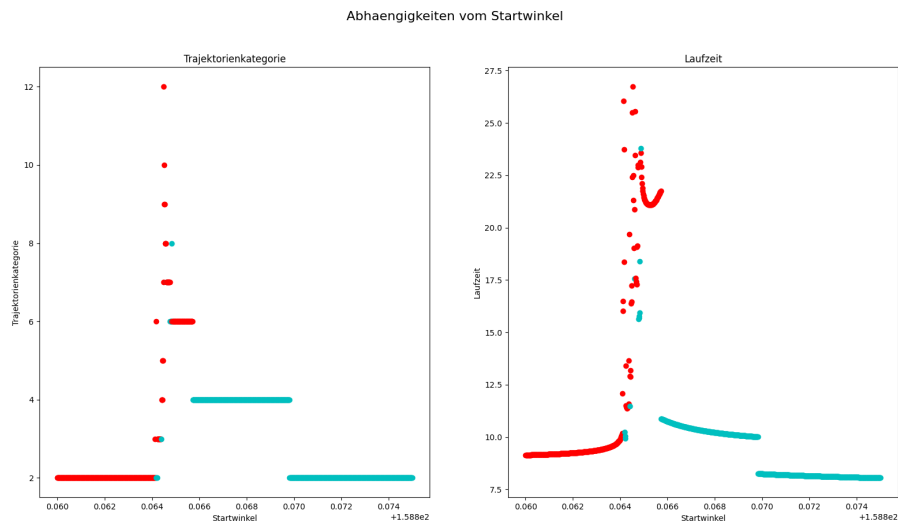


Abbildung 14: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 158,86-158,875 Grad (eigener Plot)

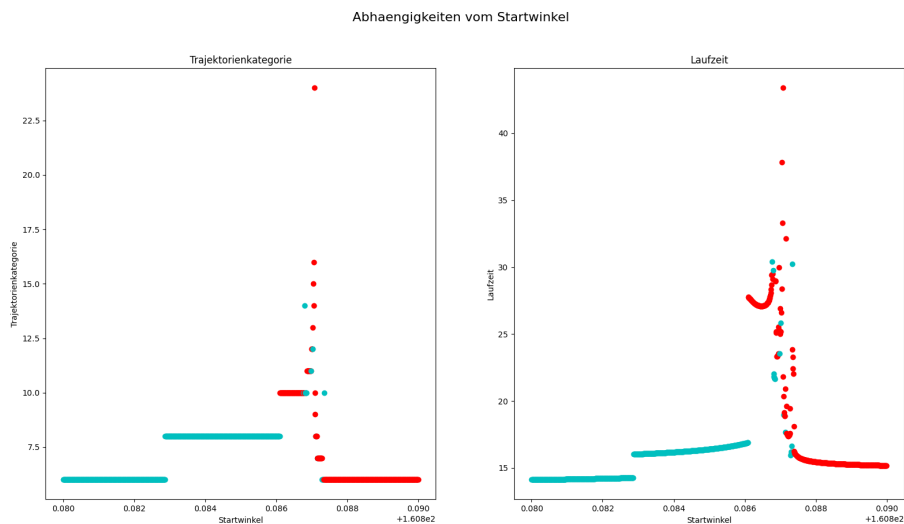


Abbildung 15: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 160,88-160,89 Grad (eigener Plot)

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

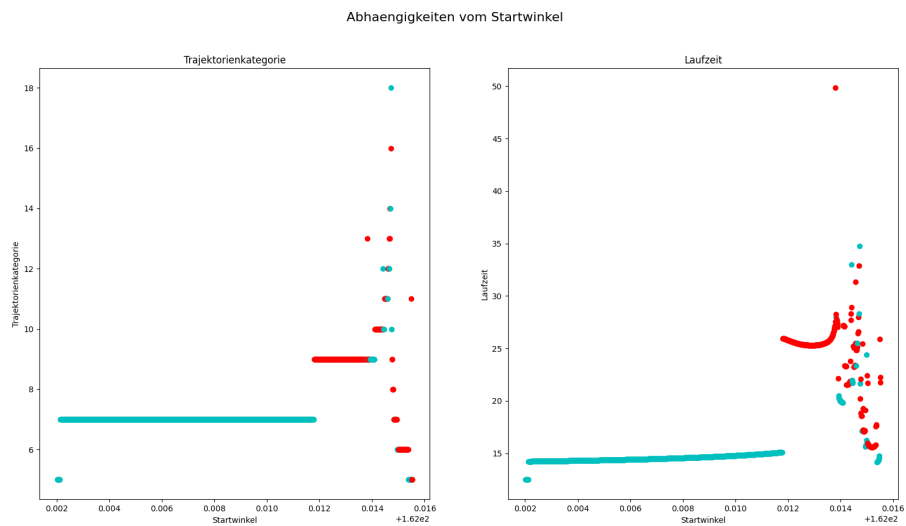


Abbildung 16: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 162,00202-162,01552 Grad (eigener Plot)

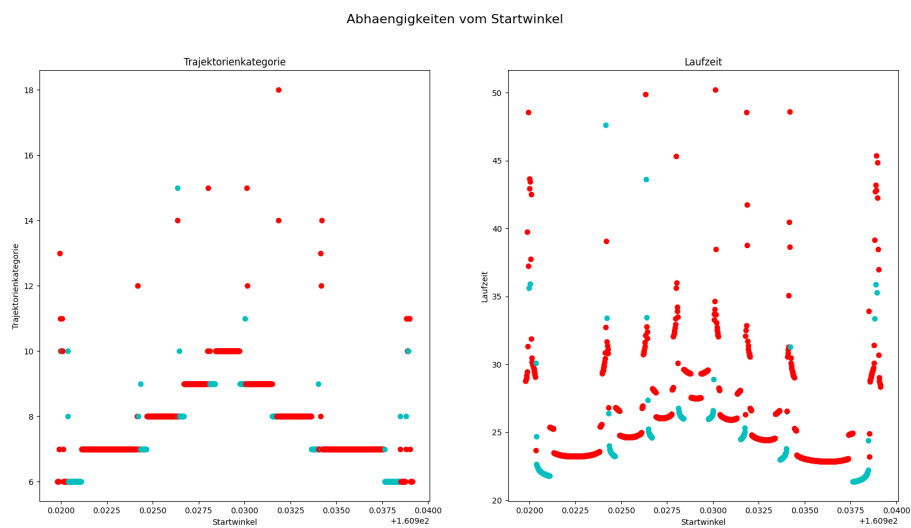


Abbildung 17: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 160,9198-160,93915 Grad (eigener Plot)

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

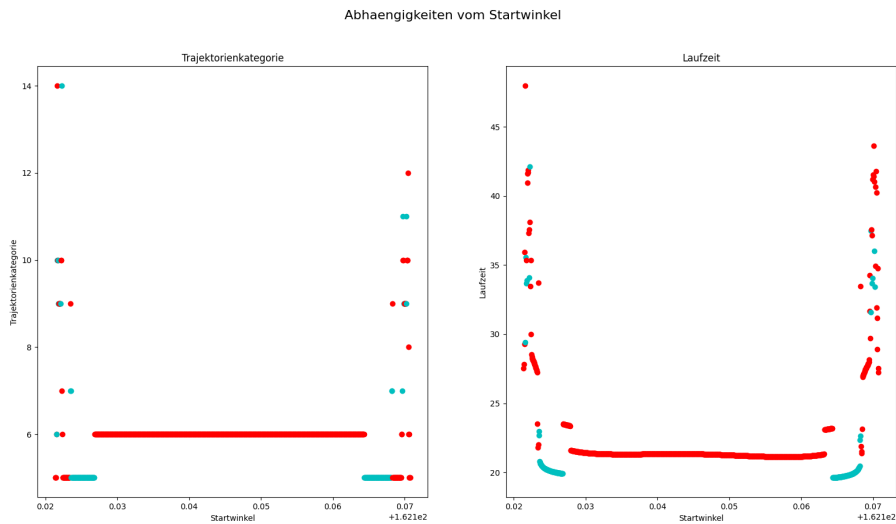


Abbildung 18: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 162,12136-162,17082 Grad (eigener Plot)

Betrachtet man nun den linken Hauptpeak, so wird ein weiterer Nebenpeak um die 172 Grad erkennbar, welcher sich wie oben aus einem nach links auslaufenden Einzelpeak sowie einem Doppelpack zusammensetzt (Abbildung 19). Betrachtet man einen Nebenpeak dicht am Doppelpack, ist dieser bei näherer Ansicht ein weiterer Doppelpack (Abbildung 20).

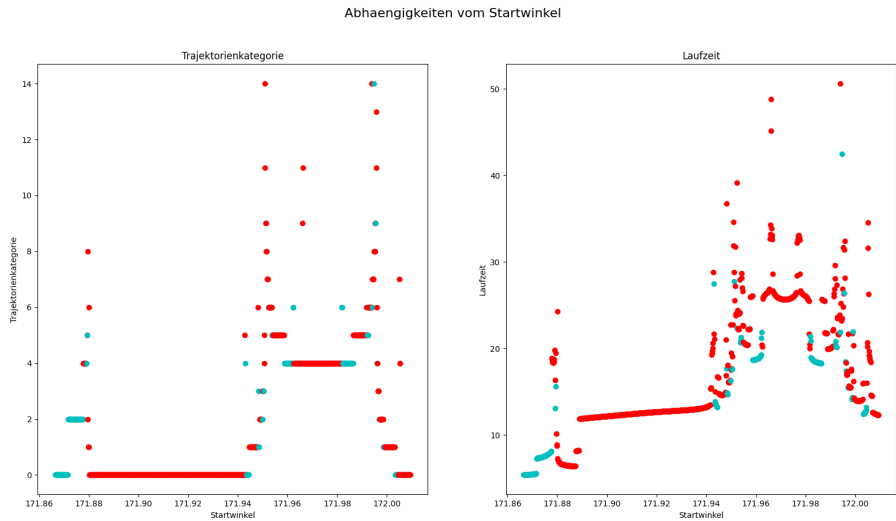


Abbildung 19: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 171,8665-172,0095 Grad (eigener Plot)

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

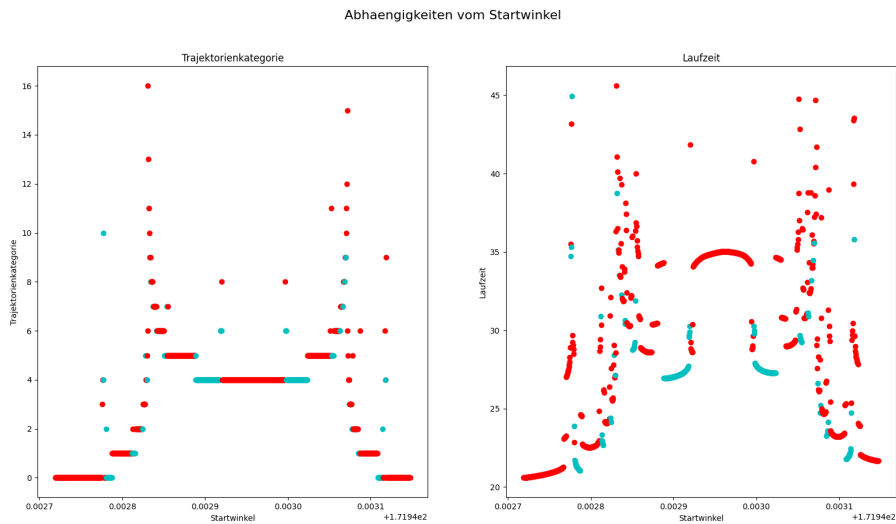


Abbildung 20: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 171,942719-171,943148 Grad (eigener Plot)

Zoomt man auch hier an den linken Hauptpeak heran, so werden weitere Nebenpeaks sichtbar (Abbildung 21). Der von rechts äußerste Nebenpeak setzt sich wiederum aus einem nach links auslaufenden Einzelpeak sowie einem Doppelpeak zusammen (Abbildung 22).

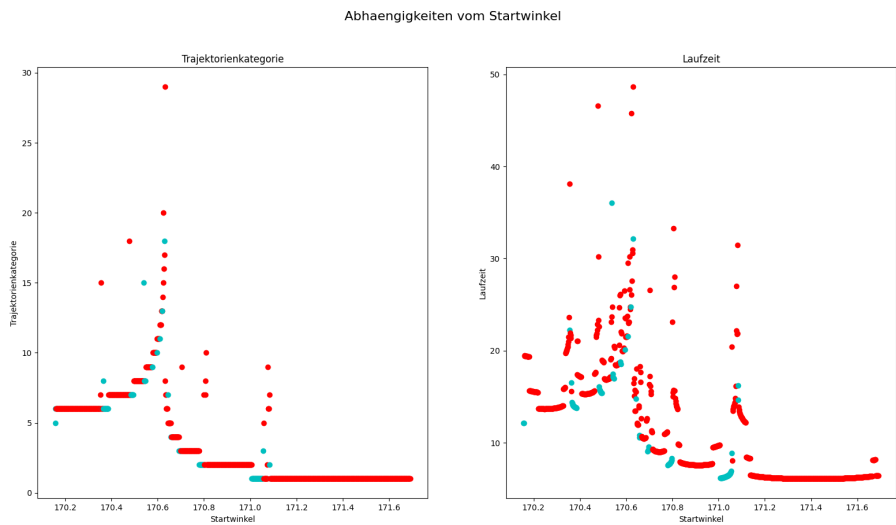


Abbildung 21: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 170,157-171,691 Grad (eigener Plot)

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

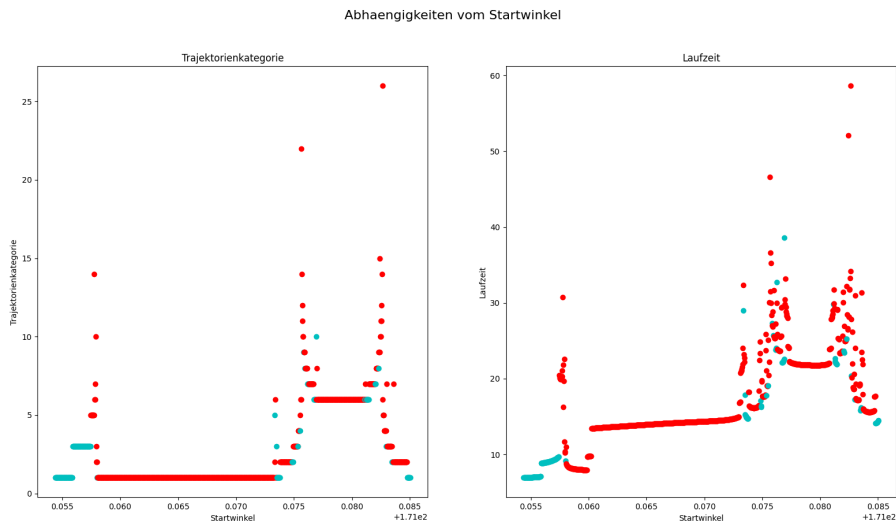


Abbildung 22: Plot von Trajektorienkategorie und Laufzeit über den Startwinkel von 171,05439-171,08507 Grad (eigener Plot)

Nun werden einige Flugbahnen betrachtet. Dabei handelt es sich um die Bahnen mit den Startwinkeln 160,88679 Grad (Abbildung 23), 160,8878 Grad (Abbildung 24) und 160,88681 Grad (Abbildung 25). Hier reicht schon eine Differenz von 10^{-5} Grad aus, um über die Landung, die Kategorie und die Laufzeit zu entscheiden. Während das Flugobjekt nach einem Start in einem Winkel von 160,88679 Grad 10 Mal den Mond umrundet und in einer Zeit von ca. 29,1243 wieder auf der Erde landet, verbleiben die Flugobjekte nach den anderen Startwinkeln auf dem Mond. Für den Startwinkel von 160,8868 Grad umläuft das Flugobjekt den Mond 14 Mal in einer Laufzeit von ca. 30,417, im Startwinkel 160,88681 umläuft diese einen wiederum 10 Mal den Mond, diesmal in einer Laufzeit von ca. 22,025 Zeiteinheiten.

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

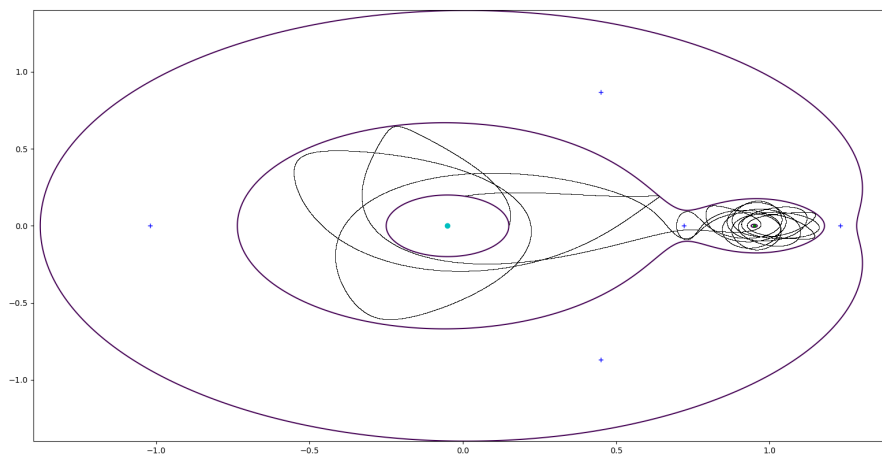


Abbildung 23: Trajektorie eines Flugobjekts mit dem Startwinkel 160,88679 Grad (eigener Plot)

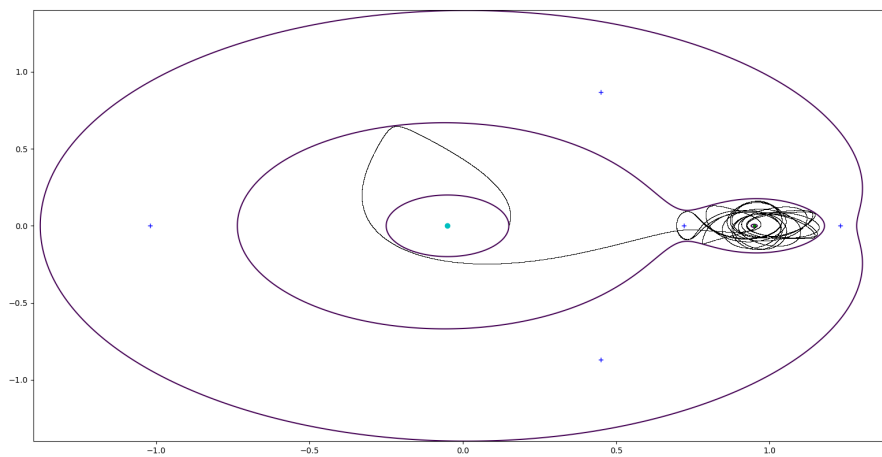


Abbildung 24: Trajektorie eines Flugobjekts mit dem Startwinkel 160,8868 Grad (eigener Plot)

3. Kategorisierung der Satellitentrajektorien im System Erde - Mond

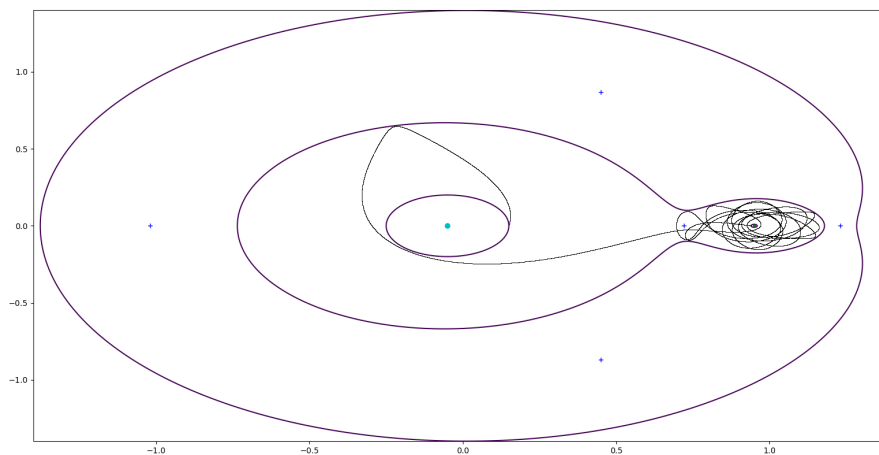


Abbildung 25: Trajektorie eines Flugobjekts mit dem Startwinkel 160,88681 Grad (eigener Plot)

3.4. Beantwortung der Fragen und Überprüfung der Hypothesen

Frage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Startgeschwindigkeit und den Trajektorien?

Überprüfung der Hypothese: Vergleicht man die generierten Bilder miteinander, so könnte man meinen, dass eine fraktale Struktur erkennbar ist. Die meisten dieser Strukturen sind zum Hauptdoppelpeak selbstähnlich, jedoch nicht exakt, da dieses Fraktal auf einem natürlichen Vorgang beruht und während der Simulation keine Kursänderungen künstlich herbeigeführt wurden. Bei den Trajektorienkategorien ist eine höhere Selbstähnlichkeit erkennbar - die Einzelpeaks sind kein störender Faktor, wenn gleich sie auch so erscheinen. Diese sind jedoch recht nah am Doppelpeak, sodass sie in Abbildung 7 nicht so stark erkennbar sind. Abhilfe schafft hier eine höhere Auflösung durch mehr Schritte. Allerdings sind störende Faktoren solche Peaks wie in den Abbildungen 16 und 17, die keinerlei Ähnlichkeit zum großen Doppelpeak aufweisen. Eine analytische Beschreibung ist durch die chaotischen Werte nicht möglich. Weiterhin ist erkennbar, dass die meisten Flugobjekte wieder auf der Erde landen. Findet ein Übergang auf ein höheres Plateau in den Trajektorienkategorien statt oder in ein niedrigeres, so landen die Flugobjekte auf dem Mond, wenn das Plateau für ersten Fall endet und für den zweiten Fall beginnt. Hier wäre eine Forschung daran zu empfehlen, um dieses Verhalten zu untersuchen. Somit lässt sich sagen, dass die Hypothesen 3.1 und 3.2 nicht bestätigt werden können.

Besteht ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der Umrundungen um den Mond und der Dauer der Trajektorien?

Überprüfung der Hypothese: Vergleicht man die beiden Diagramme Trajektorienkategorie und Laufzeit miteinander, so sieht man, dass die Peaks um die selben Winkel herum auftreten, z.B. Trajektorienkategorie 23 nach einer Laufzeit von ca. 47,625 bei ca. 159,842 Grad oder Kategorie 13 in ca. 25,374 bei ca. 170,62 Grad (vgl. Abbildung 7). Die Laufzeit ist daher auch ein Indikator dafür, wo sich Peaks aufhalten, wenn diese im Kategoriendiagramm bei schwacher Auflösung noch nicht klar ersichtlich sind. Wie man bei den verschiedenen Trajektorien in der Verfeinerung jedoch sieht, ist dieser Zusammenhang ebenfalls einer, der chaotisch ist und auch recht empfindlich, denn die gleiche Anzahl an Umrundungen bedeutet nicht gleich die gleiche Laufzeit, da hier die Umrundungen um die Erde außer Acht gelassen werden. Hier lässt sich Hypothese 3.3 bestätigen.

4. Didaktische Aspekte zum PCR3BP

4.1. Einordnung des Drei-Körper-Problems in den Rahmenlehrplan

Die Basiskonzepte und Kompetenzbereiche wurden im Jahre 2020 von der Kultusministerkonferenz (kurz: KMK) neu formuliert, mitunter ist eines der neuen Basiskonzepte „Zufall und Determiniertheit“, in welches sich das PCR3BP einordnen lässt. Im Entwurf des neuen RLPs Physik für die gymnasiale Oberstufe (GOST) finden diese Anklänge (vgl. [MBSJ/SenBJF, 2021], S.7-14), sodass hier die Einordnung des PCR3BP in das entsprechende Halbjahr der Qualifikationsphase von Bedeutung ist.

Es liegt nahe, das 3KP, im Speziellen sogar das PCR3BP, in das erste Halbjahr eines Leistungskurses einzuordnen, denn hier werden die bekannten Fachinhalte unter dem Basiskonzept „Erhaltung und Gleichgewicht“ als Grundlage thematisiert (vgl. [MBSJ/SenBJF, 2021], S. 22). Weiterhin sollen Experimente zur Vertiefung der Auswertungsmethoden und dem Umgang mit Messunsicherheiten genutzt werden und „[an] geeigneten Messreihen sind die Größen systematische und zufällige Messabweichungen, absolute und relative Abweichungen, Mittelwert und Standardabweichung“ ([MBSJ/SenBJF, 2021], ebd.) behandelt (vgl. [MBSJ/SenBJF, 2021], ebd.). Im Leistungskurs werden neben den Grundbegriffen des Gravitationsfeldes die Keplerschen Gesetze (vgl. [MBSJ/SenBJF, 2021], ebd.) behandelt, d.h. 1KPe sowie 2KPe, die die Vorstufe des 3KP darstellen. Außerdem werden Planetenbewegungen, geostationäre Satelliten sowie Swing-by-Manöver als mögliche Kontexte im Physikunterricht empfohlen (vgl. [MBSJ/SenBJF, 2021], S. 26). Somit sind auch kontextual die Grundsteine gelegt, um das 2KP-System Erde-Mond durch einen dritten, wesentlich leichteren Körper wie eine Sonde zu erweitern und zum 3KP und damit auch in die nichtlineare Dynamik überzugehen.

Da das PCR3BP mit einer Simulation verbunden ist, deren Quelltext offen einsehbar ist, empfiehlt es sich auch, den RLP der Informatik für die GOST zu betrachten. Im ersten Qualifikationshalbjahr werden imperative Algorithmen und in den Leistungskursen im dritten Qualifikationshalbjahr funktionale Programmierung behandelt (vgl. [MBSJ, 2018b], S.24). Diese Themen finden auch in den Simulationen Anwendung. Somit scheinen es gute Voraussetzungen zu sein, das PCR3BP im ersten Qualifikationshalbjahr zu behandeln.

Allerdings lernen die Schüler*innen erst im zweiten Halbjahr der Qualifikationsphase die Integration kennen und insbesondere wie ein Bestand aus Anfangswerten angewandt auf diverse Situationen rekonstruiert werden können (vgl. [MBSJ, 2018a], S.28). Somit erhalten die Lernenden im zweiten Qualifikationshalbjahr erstmalig einen Zugang zum Lösen von DGLen und

somit die mathematische Basis des PCR3BP, um ein Stück zu verstehen, wie die dazugehörigen Simulationen aufgebaut sind und funktionieren. Ein weiteres Stück sind die numerischen Methoden, die zur Lösung von DGLen benutzt werden. Diese werden im RLP jedoch nicht aufgeführt, dessen Lösungsmöglichkeiten Teil des Kapitels 4.2 sind.

Zum zweiten Qualifikationshalbjahr sollen die Lernenden mit dem Thema „Schwingungen“ konfrontiert werden. Neben den mechanischen lernen die Schüler*innen auch die elektromagnetischen Schwingungen kennen. Bezüglich der mechanischen Schwingungen ist zwar das Federpendel ([MBS/SenBJF, 2021], S. 34) ein inhaltlicher Punkt. Allerdings kennen die Lernenden auch das Fadenpendel aus der Sekundarstufe I, welches hier ergänzt werden kann. Hier kann ebenfalls durch das Experiment der Kinderschaukel (vgl. [Demtröder, 2015], S. 388) als Anwendung eine Verbindung zum Chaos und damit ein analoges Beispiel dazu geschaffen werden.

4.2. Projektwoche „Wie bewegt sich eine Rakete im All? Eine Einführung in das Drei-Körper-Problem und die Chaostheorie“

Das PCR3BP vereint Mathematik, Physik und Informatik an einem Ort. Jedoch ist es in der Praxis so, dass die Thematik recht umfangreich ist, um sie noch in das schulinterne Curriculum unterzubringen. Daher bietet sich das Thema als eine Auswahlmöglichkeit in den Schulprojektwochen an, um die gelernten Inhalte zu vernetzen sowie einen Ausblick zu geben (vgl. [Gudjons, 1989], S. 73), beispielsweise für das funktionale Programmieren im Informatikleistungskurs. Projektwochen werden folgendermaßen charakterisiert (vgl. [Heller & Semmerling, 1983], S.47):

- Lernen in Projekten in einer Zeitspanne bis zu zwei Wochen
- gemeinsame Teilnahme der Schüler*innen „eines Jahrgangs, einer Jahrgangsstufe, einer Sekundarstufe I oder II oder auch alle Jahrgänge zusammen“ ([Heller & Semmerling, 1983], S.47, zit. nach [Meyer, 1994], ebd.)
- lange Zeit vor einer Projektwoche werden Problemstellungen gesucht, diese werden mit den Lehrkräften, Eltern sowie auch Expert:innen bearbeitet
- jede:r arbeitet an einem für sich ausgewählten Thema
- geeignete Orte (auch außerhalb der Schule) zur Bearbeitung
- Erstellung eines Lernplans, der entsprechend des Arbeitsfortschrittes verändert wird

4. Didaktische Aspekte zum PCR3BP

- Präsentationstag, an dem alle teilnehmen.

Der folgende Themenvorschlag wird zeitlich so eingebettet, dass dieser insbesondere von den Schüler*innen angemessen bearbeitet werden kann. Das Thema eignet sich für die Sekundarstufe II aufgrund der Einordnung in den Rahmenlehrplan, idealerweise zum Ende des zweiten oder am Anfang des dritten Qualifikationshalbjahres. Geeignete Orte sind das Computerkabinett, ggf. auch Labore oder die Schulräume selbst. Mit den Projektteilnehmenden erstellt die Lehrperson gemeinsam einen Lernplan, der in der Mitte der Projektwoche(n) angepasst wird. Die Ergebnisse der Schüler*innen werden durch ein Plakat, die Simulation oder eine schriftliche Ausarbeitung vorgestellt. Dies ist im Rahmen des Lernplans mit der Projektgruppe zu diskutieren. In den Projektwochen eignen sie sich die Kompetenzen aus dem Kapitel 4.3.3 an bzw. verfeinern diese.

4.2.1. Thematische Beschreibung

In der Projektwoche „Wie bewegt sich eine Rakete im All? Eine Einführung in das Drei-Körper-Problem“ wird mit den Schüler*innen das Thema DGLen und ihre numerische Lösung, z.B. am expliziten Euler-Verfahren erörtert. Das erfolgt über die Wiederholung der Differential- und Integralrechnung aus dem ersten Qualifikationsjahr. Dabei lernen sie auch die Programmierung dieser Verfahren kennen. Weiterhin wiederholen sie die Keplerschen Gesetze und das Gravitationsgesetz zwischen zwei Körpern. Daraus ergibt sich die Frage, was passiert, wenn das System auf einen dritten Körper ausgeweitet wird, welche in den nächsten Tagen der Projektwoche erforscht wird. Dabei stoßen die Lernenden auf die Lösungsversuche von Euler, Lagrange und Poincaré und dass das PCR3KP analytisch nicht lösbar ist, es also kaum konkrete Lösungsgleichungen hierfür gibt. Somit wenden sie die numerische Integration durch die Simulation B.3 an, um einige Lösungen zu berechnen. Weiterhin ist auch das deterministische Chaos ein Schwerpunkt, denn sie werden feststellen, dass bei kleinsten Abweichungen der Startwerte der untersuchte Flugkörper verschiedene Kurse einschlägt. Um die Anwendungen des PCR3BP kennenzulernen, besuchen sie auch ein Planetarium, über welches sie im Anschluss eigenständig ein Produkt anfertigen, welches zum Abschluss der Projektwoche präsentiert wird.

4.2.2. Möglicher Ablauf

An der Projektwoche sollen die Schüler*innen der Sekundarstufe II in der Qualifikationsphase teilnehmen. Es ist zu beachten, dass neben diesem Projekt auch weitere Projekte angeboten werden, die Anzahl der interessierten Schüler*innen also variieren kann, sowie durch

4. Didaktische Aspekte zum PCR3BP

die Wahlfreiheit und Begrenzung der anderen Angebote auch Lernende an diesem Projekt teilnehmen, die dieses Angebot als Alternative nutzen und die Motivation ggf. entsprechend hoch oder niedrig sein wird (vgl. [Gudjons, 1989], S. 73). Das Thema dieses Projektes wird in diesem Fall von der Lehrkraft vorgeschlagen. Um auch die Lerngruppe miteinzubeziehen, setzt sich die Lehrkraft mit ihnen zusammen und trägt Impulse sowie Begriffe, die für die Gestaltung des Projektes wichtig sind, zusammen. Dabei wird eine Verknüpfung zum regulären Unterricht (bereits behandelte Themen, Ausblick auf weitere Unterrichtsthemen) hergestellt (vgl. [Gudjons, 1989], S. 67). Anschließend folgt die Planung der Projektwoche, deren Materialien, Ziel und Produkt (vgl. [Gudjons, 1989], S. 69 f.) festgelegt wird. Zum Beispiel ist der Besuch im Planetarium Teil davon, um auch einen Praxisbezug zum PCR3BP herzustellen. Ein beispielhafter Ablauf ist in der Tabelle 4 dargestellt.

| Tag | Thema | Grober Ablauf | Materialien |
|-----|-----------------|---|---------------------------------------|
| 1 | DGLen und Chaos | Die Lernenden (hier: L) wiederholen die Differential- und Integralrechnung. Dabei werden die ersten physikalischen Verbindungen zur analytischen Lösung einfacher linearer AWP erster und zweiter Ordnung geschaffen (z.B. Kraft als erste räumliche Ableitung der Energie, Beschleunigung als zweite zeitliche Ableitung des Weges). Die L werden mit der Problemstellung konfrontiert, wie sich Lösungen verändern, wenn das AWP nicht linear ist und die Anfangswerte minimal abweichen. Somit wird die erste Verbindung zur Chaostheorie geschaffen. Weiterhin lernen die L das Euler-Verfahren als einfache numerische Methode zur Annäherung der Lösung kennen. Die Lehrkraft unterstützt bei den Ausarbeitungen und Recherche. | Internet, Lehrbücher, Tafelwerk |

4. Didaktische Aspekte zum PCR3BP

| | | | |
|---|---------------------------------------|---|--|
| 2 | Das PCR3BP | Die L wiederholen das Newtonsche Gravitationsgesetz und die Keplerschen Gesetze und recherchieren anschließend, welche Wirkung ein dritter Körper im System hat. Hier wird die zweite Verbindung zur Chaostheorie geschaffen. Die L informieren sich über mögliche Vereinfachungen des 3KP, wie das PCR3BP und setzen sich mit den bestehenden Bewegungsgleichungen auseinander (Ist das AWP linear? Welche Ordnung hat es? Kann dieses auf analytischem Wege gelöst werden? Was muss bei der Lösung beachtet werden? Welche Prinzipien gelten nicht mehr? Wo besteht Kräftegleichgewicht?) Sie erhalten dabei Unterstützung von den Plots der Simulation B.4 und plotten mithilfe des Programms B.3 einige Trajektorien selbst. Die Lehrkraft unterstützt bei der Auseinandersetzung mit dem Programmaufbau. | Internet, Fachbücher, Tafelwerk |
| 3 | Anwendungen des Drei-Körper-Problems | Die L setzen sich mit den Anwendungsmöglichkeiten des PCR3BP im Bezug auf Raumfahrt und Planetenbewegung auseinander. Dabei erhalten sie im Planetarium einen Überblick dazu. Sie wählen ein Thema aus, mit welchem sie sich am folgenden Tag näher beschäftigen möchten und beginnen mit den ersten Recherchen für ein Plakat. | Geld für den Planetariumseintritt |
| 4 | Ausarbeiten der Plakate/ Präsentation | Die L bearbeiten ihr ausgewähltes Thema und erstellen dazu eine Präsentation. | PC mit Programm zum Erstellen einer Präsentation |
| 5 | Vorstellung des Themas, Abschluss | Die L stellen ihre ausgewählten Themen vor. Anschließend wird zusammengetragen, was die L aus der Projektwoche mitnehmen und es gibt eine Feedbackrunde. | Whiteboard |

Tabelle 4: Beispielhafter Ablauf der Projektwoche

Zum Abschluss der Projektwoche soll eine Präsentation zur ausgewählten Anwendung des PCR3BP gestaltet werden, da „vor allem Formen der Mitteilung für andere [...] wiederum zu

einer Handlungsaufgabe werden [wie beispielsweise] das *Auskunft-Geben* gegenüber Eltern, Kritiker[*innen], Mitschüler[*innen], Freund[*innen] [oder] *freie Ausdrucksformen* in Texten, Bildern, Fotos“ ([Gudjons, 1989], S. 72), welche auf einer Präsentation vereint werden können. Die Lehrkraft fasst die Präsentationen sowie auch das Feedback für die Lehrerkonferenz zusammen, um die Ergebnisse darzulegen und ggf. auch Anregungen für weitere Projekte anzubieten (vgl. [Gudjons, 1989], ebd.).

4.3. Einordnung des Konzeptes in die Bildungsstandards

4.3.1. Physik als theoriegeleitete Erfahrungswissenschaft

Durch das Modell des Drei-Körper-Problems lernen die Schüler*innen die Physik vor allem in ihrer Eigenschaft der theoriegeleiteten Erfahrungswissenschaft kennen. Die KMK definiert dies folgendermaßen:

„Die Physik als theoriegeleitete Erfahrungswissenschaft macht Vorgänge über die menschliche Wahrnehmung hinaus durch Messtechnik erfahrbar und durch Modelle beschreibbar, zeigt aber auch die Grenzen der Messbarkeit und Alltagserfahrung auf, z. B. im Bereich der Quantenphysik. Die Lernenden erfahren im Unterricht die Bedeutung der abstrahierenden, idealisierenden und formalisierten Beschreibung von Prozessen und Systemen, wenn sie regelmäßig mathematisch modellieren und Vorhersagen treffen. Gleichzeitig sind sich die Lernenden der begrenzten Gültigkeit der Modelle bewusst. Sie lernen, dass aus theoretischen Überlegungen Aussagen zu neuen Zusammenhängen und zur Vorhersagbarkeit von Ereignissen abgeleitet werden können.“ ([KMK, 2020], S. 11)

Der Lerngruppe wird die mathematische Darstellung durch die Bewegungsgleichungen des PCR3BP in Form von DGLen als Anfangswertproblem (kurz: AWP) nähergebracht. Sie erfahren, dass dieses AWP nicht so einfach durch Integration gelöst werden kann und dass die Lösung dieses AWP auf numerischem Wege erfolgen muss. Sie lernen die mathematischen und physikalischen Hintergründe der in dieser Arbeit thematisierten Simulationen kennen. Mithilfe der Simulation B.3 modelliert die Projektgruppe verschiedene Trajektorien eines Flugobjekts, in dem sie die Anfangswerte verändern und stellen fest, dass auch minimale Abweichungen dieser die Trajektorien maßgeblich verändern. Die Schüler*innen erkennen auch mithilfe der Simulation weiterhin, dass das PCR3BP lediglich aufgrund der in Kapitel 2.1. beschriebenen Charakterisierungen eine Vereinfachung des 3KP im Allgemeinen darstellt. Gleichzeitig finden

4. Didaktische Aspekte zum PCR3BP

sie auch heraus, dass die Keplerschen Gesetze nicht zur Lösung des Drei-Körper-Problems beitragen, welches die Reichweite der dieser einschränken. Außerdem können die Schüler*innen auch die Frage diskutieren, inwiefern die Erweiterung auf einen vierten Körper die Lösungen beeinflusst.

4.3.2. Basiskonzepte

Gemäß der neuen Bildungsstandards des Faches Physik gibt es nun die vier Basiskonzepte:

- Erhaltung und Gleichgewicht
- Superposition und Komposition
- Mathematisieren und Vorhersagen
- Zufall und Determiniertheit ([KMK, 2020], S.18 f.).

Das PCR3BP wird in diese eingeordnet.

Erhaltung und Gleichgewicht „Viele Sachverhalte und Vorgänge lassen sich in der Physik durch ein Denken in Bilanzen oder Gleichgewichten beschreiben und erklären. Hierbei spielen neben statischen und dynamischen Gleichgewichtsbedingungen auch Erhaltungssätze wie z. B. der Energie- und der Impulserhaltungssatz eine wesentliche Rolle.“ ([KMK, 2020], S.18 f.) Hinsichtlich des PCR3BP ist die Energieerhaltung, gegeben durch das Jacobi-Integral, maßgeblich für die Startbedingungen des kleinen Körpers in der Bewegung zwischen den beiden großen. Die Lagrangepunkte lassen sich durch das Kräftegleichgewicht zwischen den Gravitationskräften der schweren Körper und der Zentripetalkraft des leichten Körpers erklären, somit kommt auch der Impulserhaltungssatz zum Tragen.

Superposition und Komposition „Die Superposition bildet eine wesentliche Grundlage der analytisch-synthetischen Vorgehensweise in der Physik. Die Überlagerung gleicher physikalischer Größen oder die Zerlegung von physikalischen Größen in Komponenten“ ([KMK, 2020], S.19) findet im PCR3BP als nichtlineares chaotisches Problem keine Anwendung. Die Schüler*innen erfahren, dass die Überlagerung von Kräften mehrerer Körper nicht immer additiv ist und zur Lösung der Bewegungsgleichungen hinderlich.

4. Didaktische Aspekte zum PCR3BP

Mathematisieren und Vorhersagen „Ein zentrales Merkmal der Physik ist es, Vorgänge und Zusammenhänge mathematisch zu beschreiben und daraus Erkenntnisse und Vorhersagen zu erhalten. Die Beschreibung von Größenabhängigkeiten erfolgt in Gestalt von Gleichungen und Funktionen. Die physikalische Interpretation von gegebenenfalls grafisch ermittelten Ableitungen und Integrationen eröffnet weitere Möglichkeiten für die Erkenntnisgewinnung[...]“ ([KMK, 2020], ebd.) Daraus ergibt sich, dass die Bewegung eines Körpers mit kleiner Masse zwischen zwei Körpern mit wesentlich größerer Masse durch zwei gekoppelte DGLen zweiter Ordnung beschrieben wird im Sinne des PCR3BP. Diese lassen sich nicht analytisch, sondern numerisch lösen. Die Trajektorie des Körpers mit der kleinen Masse hängt von den Anfangswerten Startposition und Startgeschwindigkeit ab. Durch die numerische Lösung in grafischer Darstellung können die Schüler*innen über die Simulation B.3 vorhersagen, welche Trajektorie der kleine Körper annimmt.

Zufall und Determiniertheit „Determiniertheit ist in allen Bereichen der Physik die Grundvoraussetzung für eine Beschreibung von Phänomenen durch Gesetzmäßigkeiten, etwa für die Vorhersage von Ereignissen oder für die Modellierung durch Ausgleichskurven. Zufall tritt in der Physik in unterschiedlichen Interpretationen in Erscheinung, z. B. als Messunsicherheit, als statistische Verteilung physikalischer Größen oder im Zusammenhang mit Quantenobjekten.“ ([KMK, 2020], ebd.) Das bedeutet, dass die Lösung der Bewegungsgleichungen, also die Bewegung des Körpers mit der kleinen Masse durch die Bewegungsgleichung und ihre Anfangswerte festgelegt ist und nicht zufällig entsteht, also deterministisch ist. Jedoch ist hier nicht festgelegt, wie sich die Trajektorie bei minimalen Änderungen von mindestens einem Startwert ändert, was die Reproduzierbarkeit der real durchgeführten Analogexperimente erschwert und damit zwei Trajektorien zufällig erscheinen können, was sie durch ihre Determiniertheit allerdings nicht sind. Für die Schüler*innen ist es somit wichtig zu verstehen, dass gerade deswegen die Anfangswerte sehr genau in das Programm einzugeben sind und nicht als gerundeter Wert, um eine Art Abkürzung zu schaffen. Somit eine Unsicherheit entsteht, welche in Analogexperimenten nachempfunden werden kann.

4.3.3. Kompetenzbereiche

Die Lernenden gewinnen durch die Erarbeitung des PCR3BP die folgenden Kompetenzen insbesondere hinsichtlich der Sachkenntnis und der Erkenntnisgewinnung. Im Folgenden werden die zu gewinnenden Kompetenzen in der Projektwoche speziell im Fach Physik vertieft.

Sachkompetenz

Die Sachkompetenz umfasst die „Kenntnis naturwissenschaftlicher Konzepte, Theorien und Verfahren und [die] Fähigkeit, diese zu beschreiben und zu erklären sowie geeignet auszuwählen und zu nutzen, um Sachverhalte aus fach- und alltagsbezogenen Anwendungsbereichen zu verarbeiten.“ ([KMK, 2020], S.13) Die Projektgruppe soll hierbei das gewonnene Fachwissen nutzen, um innerfachliche und anwendungsbezogene Aufgabenstellungen zu bearbeiten (vgl. [KMK, 2020], S.14). Für die Bearbeitung von Aufgaben und Problemen sind zum einen Modelle und Theorien und zum anderen Verfahren und Experimente notwendig. Die Schüler*innen verlassen in diesem Kompetenzfeld den Themenbereich der linearen Dynamik, insbesondere des 2KP, und lernen dessen Grenzen kennen. Weiterhin werden sie mit den Grundbegriffen der Chaostheorie vertraut und können diese für ihre Projekte anwenden.

Im Bezug auf das PCR3BP im System Erde-Mond sind die Lernenden nach der Arbeit in der Projektwoche in der Lage das Phänomen des chaotischen Verhaltens unter der Nutzung der zugrundeliegenden Simulationen des PCR3BP B.3 und B.4 sowie der Grundzüge der Chaostheorie zu erklären. Sie erläutern, dass Bewegungen auch nicht linear beschrieben werden können und diese durch geeignete Bewegungsgleichungen determiniert werden können. (S1) Sie nutzen erstere Simulation, um Trajektorien eines Flugobjektes zwischen Erde und Mond auf einer Ebene zu bestimmen (S3). Weiterhin erläutern sie insbesondere in der Projektwoche den Gültigkeitsbereich des PCR3BP (kreisförmige Bewegung zweier massereicher Körper um den gemeinsamen Schwerpunkt auf einer Ebene, Bewegung eines wesentlich leichteren Körpers unter Einfluss der beiden schweren als Vereinfachung des 3KP), dass auch hier das Superpositionsprinzip nicht mehr gilt und beschreiben die Möglichkeit, die Flugbahn eines Flugobjektes unter Einfluss von Erde und Mond vorherzusagen und wie sich dieses mit der Änderung der Startrichtung verhält. (S2).

Da für die Simulationen ein RKV (im Speziellen das DPV) genutzt wird, wenden die Lernenden in den Projektwochen diese auf das PCR3BP als System zweier DGLen zweiter Ordnung an (S7). Die Versuchsanordnung liegt somit vor, die Schüler:innen sind nach der Projektwoche in der Lage, das Programm B.3 hinsichtlich der Anfangswerte zu nutzen und die Beobachtungen für minimal unterschiedliche Anfangswerte über die Speicherung der ausgegebenen Grafiken zu protokollieren (S4). Sie setzen sich fächerübergreifend mit dem Aufbau der Simulationen auseinander und können das DGS, die Anfangswerte, DPV sowie Endbedingungen, wann das Programm beendet werden soll, identifizieren (S5). Für die Auswertung des Experiments wenden die Lernenden die Simulation B.4 an, die die Abhängigkeit von Laufzeit und Trajektorien von den Anfangswerten abbildet (S6).

Erkenntnisgewinnungskompetenz

Durch die erlangten Erkenntnisgewinnungskompetenzen werden die gewonnenen Sachkompetenzen durch einen theoriegeleitet reflexiven Charakter, insbesondere zur Durchführung von Experimenten erweitert. Nach den Bildungsstandards „zeigt sich [dies] in der Kenntnis von naturwissenschaftlichen Denk- und Arbeitsweisen und in der Fähigkeit, diese zu beschreiben, zu erklären und zu verknüpfen, um Erkenntnisprozesse nachvollziehen oder gestalten zu können und deren Möglichkeiten und Grenzen zu reflektieren.“ ([KMK, 2020], ebd.) Experimente werden nicht nur durchgeführt, sondern die Schüler*innen sind in der Lage, vorab Fragestellungen und dazugehörige Hypothesen zu formulieren, ihre Experimente auch zu planen und nach der Durchführung auszuwerten und die Ergebnisse zu diskutieren. So wird für das Experiment ein theoretischer und reflexiver Rahmen geschaffen (vgl. [KMK, 2020], S. 15). Im Bereich der Chaostheorie lernt die Projektgruppe, dass die Lösungen ihrer gewählten Thematik, insbesondere des PCR3BP, nicht mehr auf eine Gleichung reduziert werden können und die Experimente graphisch anhand verschiedener Auffälligkeiten bezüglich Fraktalen auszuwerten. Anschließend verlassen die Lernenden die Projektwoche mit der Erkenntnis, dass die Genauigkeit der Startwerte für eine Reproduktion von Experimenten eine tragende Rolle spielt und insbesondere in nichtlinearen Problemen zum Chaos führen kann.

Die Lernenden entwickeln in der Projektwoche Fragestellungen zur Änderung der Trajektorie des Flugobjekts zwischen Erde und Mond, wenn sich die Startwerte ändern (E1) und stellen dazu geeignete Hypothesen auf, die auf den Grundlagen der Chaostheorie gestützt sind (E2). Die Schüler*innen argumentieren, dass die Simulation B.3 aufgrund der zeitlichen Geschwindigkeit, Ergebnisse zu präsentieren und die Hypothesen zu überprüfen, geeignet ist, allerdings begrenzt auf eine ebene Bewegung (E3). Mithilfe der Simulation B.4 modellieren sie das chaotische Verhalten (die abweichenden Trajektorien) und beziehen dabei ihr Wissen zum deterministischen Chaos sowie die erhaltenen Ergebnisse der Simulation B.3 ein (E4). Da die Simulation B.4 durch die Gesamtlaufzeit mehrerer Trajektorien länger als eine Stunde benötigt, werden die Lernenden insbesondere in der Projektwoche 4.2 lernen, dass eine Forschung länger dauert, bis Ergebnisse zu sehen sind. Sie planen die Simulation begründet als ein geeignetes Experiment ein, um ihre gewählte Fragestellung zu den Trajektorien des PCR3BP zu untersuchen (E5).

Die Schüler*innen erklären mithilfe der Chaostheorie die Abhängigkeiten der Trajektorien von dem Startwinkel und dass die Abweichungen der Trajektorien keine Proportionalität zu den Abweichungen des Startwinkels aufweisen (E6). Aus diesen Abweichungen argumentieren sie, dass die genaue Einhaltung der Startbedingungen wichtig ist, um die gleiche Trajekto-

4. Didaktische Aspekte zum PCR3BP

rie wiederzuerhalten und dass die minimalste Abweichung zu einem nicht vorhersagbaren Verhalten des Flugobjekts führen kann (E7). Um das das PCR3BP zu lösen, erkennen die Lernenden, dass die Simulation und die Chaostheorie hilfreich sind, allerdings nicht, wenn es sich um ein allgemeines 3KP handelt (E8). Weiterhin reflektieren sie, dass die Simulationen für die Vorhersage von Trajektorien relevant sind und dass sich daraus die Konsequenzen für abweichende Startbedingungen abschätzen lassen - somit gewinnen sie Erkenntnis über den Auslöser chaotischen Verhaltens (E9). Bei einer anderen Themenwahl wenden die Lernenden ebenfalls die Begriffe der Chaostheorie für ihre Experimentauswertung an und kommen auch hier zur Erkenntnis, wie wichtig genauen Startbedingungen sind und welche Tragweite die Simulationen haben.

Die Projektgruppe bezieht ihre Überlegungen aus dem Experiment und dem chaotischen Verhalten auf die Raumfahrt und Planetenbewegungen und überlegen, inwiefern sich die gewonnenen Erkenntnisse auf die Allgemeinheit übertragen lassen und erkennen, dass das 2KP in diesem Bezug Grenzen aufweist, da mehr als nur zwei Körper miteinander interagieren (E10). Weiterhin reflektieren sie den Prozess zur Erkenntnisgewinnung, den sie durchlaufen haben und ihre gewonnenen Erkenntnisse (E11). Dabei ziehen sie den Vergleich zwischen der Simulation, deren Ergebnisse sich stets reproduzieren lassen und entsprechenden Analogexperimenten, dessen Ergebnisse sich schwer reproduzieren lassen, jedoch bei beiden chaotisches Verhalten erkennbar ist.

5. Schlussfolgerung

In der Masterarbeit wurde sich mit den Auswirkungen der Richtung der Startgeschwindigkeit durch einen Winkel α auf die Laufzeit eines Flugobjekts sowie die Umrundungen dieses Flugobjekts (Trajektorienkategorie) um den Mond im Rahmen des PCR3BP beschäftigt. Dabei hat sich herausgestellt, dass die Umlaufzeit sowie die Trajektorienkategorien nicht analytisch beschrieben werden können. Dafür ergeben sich für immer kleiner werdende Winkelunterschiede scheinbar fraktale Strukturen, die zu einem Doppelpeak im Intervall von 156 bis 173 Grad selbstähnlich sind, durch ihre natürliche Entstehung nicht exakt. Jedoch ergeben sich auch andere Strukturen wie zwei einzelne Peaks oder mehrfach Peaks, die die Vermutung der fraktalen Struktur nicht bestätigen. Die Peaks in der Trajektorienkategorie und der Umlaufzeit treten um dieselben Startwinkel herum auf. Allerdings sind die Laufzeit und die Trajektorienkategorien nicht proportional zueinander, so kann es sein, zwei Flugobjekte der gleichen Trajektorienkategorie eine unterschiedliche Laufzeit haben. Die Flugobjekte landen in ihrer natürlichen Laufbahn am meisten auf der Erde. Steht eine Erhöhung bevor oder fand eine Erniedrigung der Trajektorienkategorien statt, so landen die Flugobjekte anfangs auf dem Mond. Die Einordnung des PCR3BP in den Schulunterricht fand mithilfe der KMK-Richtlinien sowie dem Entwurf des neuen RLP für den Physikunterricht im Land Brandenburg statt. Hier wurde eine Projektwoche als Angebot vorgeschlagen, um einen Exkurs in die Raumfahrt, Himmelsmechanik und Chaostheorie zu bieten. Diese Projektwoche findet sich vor allem in der Physik wieder, allerdings werden auch Verbindungen zum Mathematik- und Informatikunterricht geschaffen, in dem sich die Schüler*innen mit der in der Masterarbeit thematisierten Simulation zum Finden von Trajektorien auseinandersetzen.

Ziel der Masterarbeit war es, die Frage nach dem Zusammenhang zwischen verschiedenen Trajektorien eines Satelliten als Lösungskurven des restriktiv zirkulär planaren Drei-Körper-Problems im System Erde-Mond und der Richtung der Geschwindigkeit, mit der der Satellit von der Erde aus startet, wenn die Startposition gleichbleibt, zu beantworten. Außerdem sollte auch eine Implementierung dieses Problems in den Physikunterricht der Sekundarstufe II erfolgen. Das erste Ziel wurde teilweise erreicht, denn es konnte der Zusammenhang zwischen dem Startwinkel und der Trajektorienkategorie bzw. der Laufzeit des Flugobjekts grafisch dargestellt werden, allerdings fehlt eine mathematische Beschreibung in Form von Gleichungen dieser Grafiken. Das zweite Ziel wurde ebenfalls teilweise erreicht, denn die Projektwoche ist nicht die einzige Möglichkeit, um das PCR3BP oder Auszüge daraus in den Physikunterricht der GOST zu implementieren.

Die Ergebnisse der Untersuchung bieten neue Erkenntnisse für die Raumfahrt an. Hier kön-

5. Schlussfolgerung

nen Forschende einen Einblick gewinnen, unter welcher Bedingung sie ein Flugobjekt um den Mond fliegen lassen können und danach wieder auf die Erde zurückkehrt. Weiterhin bieten die durch das Programm geplotteten Diagramme beispielsweise auch einen Überblick darüber, welche Flugbahnen wenig Zeit bei einer möglichst großen Anzahl von Umrundungen um den Mond möglich sind und unter welchem Winkel. Für den Unterricht bietet das PCR3BP durch verschiedene Aspekte wie die Raumfahrt oder Chaos eine Vielzahl an Möglichkeiten, dieses in den Unterricht einzubetten.

Das PCR3BP ist eine Vereinfachung des 3KP, welche schon viele Ergebnisse in der Forschung und praktischen Anwendung ermöglicht hat. Allerdings bietet es sich auch an, so einen Untersuchung im dreidimensionalen Raum durchzuführen oder unter Bezug eines vierten massereichen Körpers wie die Sonne. Dies würde den Rahmen dieser Arbeit jedoch sprengen. Außerdem sind die Umstände nicht geklärt, weshalb vor dem Aufstieg oder nach dem Abstieg in eine neue Trajektorienkategorie zunächst eine Landung auf dem Mond stattfindet und danach die Landung auf der Erde fortgesetzt wird. Ebenso verhält sich dies mit der Projektwoche zum PCR3BP. Dabei handelt es sich lediglich um eine Überlegung, die jedoch noch nicht in die Tat umgesetzt wurde. Es ist interessant zu wissen, wie sich die Überlegung in der Praxis bewährt und wie dieses Thema im Fachkollegium allgemein umgesetzt würde. Allerdings ist auch hier eine praktische Erprobung etwas, was weiterer Forschung bedarf.

Für die Chaosforschung kann daher eine Untersuchung der Trajektorienkategorien und die Laufzeit in Abhängigkeit vom Startwinkel auf der Erde auch im dreidimensionalen Raum sinnvoll sein. Außerdem kann weiterführende Forschung das PCR3BP auch durch einen vierten ergänzten Körper wie beispielsweise die Sonne zu betrachten. Nicht zuletzt würde auch eine Forschung an den Gründen, wann eine Landung auf dem Mond stattfindet, diese Arbeit hier ergänzen. In der Physikdidaktik bietet sich Forschung zum den Vorkenntnissen von Lehrkräften zur Chaostheorie an und auch eine Untersuchung dazu, wie die Aspekte des PCR3BP in den Unterricht implementiert werden können sowie eine Evaluation des Rahmens der in der Masterarbeit vorgeschlagenen Projektwoche.

Literatur

- [Abraham & Marsden, 2008] Abraham, R. & Marsden, J.E. (2008). *Foundations of Mechanics*. 2. Auflage. Providence: American Mathematical Society.
- [Argyris et al., 2017] Argyris, John, Faust, Gunter, Haase, Maria & Friedrich, Rudolf (2017). *Die Erforschung des Chaos. Dynamische Systeme*. 3. Auflage. Berlin: Springer Vieweg.
- [Bartelmann et al., 2018] Bartelmann, Matthias et al. (2018). *Theoretische Physik 1. Mechanik*. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.
- [Demtröder, 2015] Demtröder, Wolfgang (2015). *Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme*. 7. Auflage. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.
- [Deuflhard & Bornemann, 2013] Deuflhard, Peter & Bornemann, Folkmar (2013). *Numerische Mathematik 2. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 4. Auflage. Berlin: De Gruyter.
- [Gudjons, 1989] Gudjons, Herbert (1989). *Handlungsorientiert lehren und lernen. Projektunterricht und Schüleraktivität*. 2. Auflage. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- [Hanke-Bourgeois, 2009] Hanke-Bourgeois, Martin (2009). *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. 3. Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- [Heller & Semmerling, 1983] Heller, Albert & Semmerling, Rüdiger (1983). *Das PROWO-Buch. Leben, Lernen, Arbeiten in Projekten und Projektwochen*. Königstein/Ts.: Scriptor.
- [KMK, 2020] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. *Bildungsstandards im Fach Physik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.06.2020)*. Hürth: Wolters Kluwer. Zugriff unter https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2020/2020_06_

Literatur

18-BildungsstandardsAHR_Physik.pdf am 18.08.2021, 15:13 Uhr.

- [Koon et al., 1999] Koon, W.S., Lo, M.W., Marsden J.E. & Ross, S.D. (1999). *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*. International Conference on Differential Equations, Berlin. Zugriff unter DOI: https://doi.org/10.1142/9789812792617_0222 am 11.09.2020, 16:53 Uhr.
- [Landau & Páez, 2018] Landau, Rubin H. & Páez, Manuel José (2018). *Computational Problems for Physics. With Guided Solutions Using Python*. Boca Raton: CRC Press.
- [Layek, 2015] Layek, G.C. (2015). *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Neu Delhi: Springer.
- [Letellier, 2019] Letellier, Christophe (2019). *Chaos in Nature*. 2. Ausgabe. New Jersey: World Scientific.
- [Linge & Langtangen, 2016] Linge, Svein & Langtangen, Hans Petter (2016). *Programming for Computations - Python. A Gentle Introduction to Numerical Simulations with Python*. Heidelberg/Dordrecht/London/-New York: Springer Open.
- [MBS, 2018a] Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.)(2018). *Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe. Teil C Mathematik*. Potsdam/Berlin. Zugriff unter https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2018/RLP_GOST_Mathematik_BB_2018.pdf am 27.09.2021, 17:52 Uhr.
- [MBS, 2018b] Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.)(2018). *Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe. Teil C Informatik*. Potsdam/Berlin. Zugriff unter https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2018/RLP_GOST_Informatik_BB_2018.pdf am 29.09.2021, 14:25 Uhr.

- [MBS/SenBJF, 2021] Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg & Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie des Landes Berlin (Hrsg.)(2021). *Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe. Teil C Physik. Entwurf vom 12.03.2021*. Potsdam/Berlin. Zugriff unter https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/Neuentwicklung_NaWi/2021_03_12_RLP_GOST_Teil_C_Physik.pdf am 18.08.2021, 15:30 Uhr.
- [Messerschmid & Fasoulas, 2017] Messerschmid, Ernst & Fasoulas, Stefanos (2017). *Raumfahrtssysteme. Eine Einführung mit Übungen und Lösungen*. 5. Auflage. Berlin: Springer.
- [Meyer, 1994] Meyer, Hilbert (1994). *Unterrichtsmethoden. II: Praxisband*. 6. Auflage. Frankfurt am Main: Cornelsen Verlag Scriptor.
- [Meyer & Offin, 2017] Meyer, Kenneth R. & Offin, Daniel C. (2017). *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. 3. Auflage. Cham: Springer.
- [Nolting, 2013] Nolting, Wolfgang (2013). *Grundkurs Theoretische Physik 1. Klassische Mechanik*. 10. Auflage. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.
- [Shivamoggi, 2014] Shivamoggi, Bhimsen K. (2014). *Nonlinear Dynamics and Chaotic Phenomena: An Introduction*. 2. Ausgabe. Dordrecht: Springer.
- [von Kusserow, 2018] von Kusserow, Ulrich (2018). *Chaos, Turbulenzen und kosmische Selbstorganisationsprozesse*. Berlin: Springer Spektrum.

A. Abkürzungen

Alphabetisch geordnet:

| | |
|--------|---|
| 1KP | Ein-Körper-Problem |
| 2KP | Zwei-Körper-Problem |
| 3KP | Drei-Körper-Problem |
| DGL | Differentialgleichung |
| DGS | Differentialgleichungssystem |
| DPV | Dormand-Prince-Verfahren |
| GOST | gymnasiale Oberstufe |
| KMK | Kultusministerkonferenz |
| L | Lernende |
| PCR3BP | planar circular restricted three body problem (deutsch: planares zirkuläres restriktives Drei-Körper-Problem) |
| RKV | Runge-Kutta-Verfahren |
| RLP | Rahmenlehrplan |

B. Quelltexte

B.1. Klassisches RKV für das PCR3BP (Test)

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#Startwerte und Schrittweite
t=0
y=[[1.2,0],[0,-1.04935750983]]
h=0.0001
T=6.19217
mu=0.012277471
nu=1-mu
i=0

#Definiere DGL
def f(t,y):
    return [[y[1][0],y[1][1]],[y[0][0]+2*y[1][1]-(nu*(y[0][0]+mu))
        ↪ /((y[0][0]+mu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)-(mu*(y[0][0]-nu))/((y
        ↪ [0][0]-nu)**2+y[0][1]**2)**(3/2),y[0][1]-2*y[1][0]-(nu*y
        ↪ [0][1])/((y[0][0]+mu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)-(mu*y[0][1])
        ↪ /((y[0][0]-nu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)]]

#Gewichte B
B1=1/6
B2=1/3
B3=1/3
B4=1/6

#Stuetzstellen c
c1=0
c2=1/2
c3=1/2
c4=1

#Koeffizienten aus A
a21=1/2

```

B. Quelltexte

```
a31=0
```

```
a41=0
```

```
a32=1/2
```

```
a42=0
```

```
a43=1
```

```
while t<=T:
```

```
    #Stufen fuer das RKV
```

```
    k1=y
```

```
    k2=y+h*a21*np.asarray(f(t+c2*h, k1))
```

```
    k3=y+h*a31*np.asarray(f(t+c3*h, k1))+h*a32*np.asarray(f(t+c3*h, k2  
    ↪ ))
```

```
    k4=y+h*a41*np.asarray(f(t+c4*h, k1))+h*a42*np.asarray(f(t+c4*h, k2  
    ↪ ))+h*a43*np.asarray(f(t+c4*h, k3))
```

```
    #RKV
```

```
    y=y+h*B1*np.asarray(f(t+c1*h, k1))+h*B2*np.asarray(f(t+c2*h, k2))+  
    ↪ B3*h*np.asarray(f(t+c3*h, k3))+B4*h*np.asarray(f(t+c4*h, k4)  
    ↪ )
```

```
    print(t, y, i)
```

```
    plt.plot(y[0][0], y[0][1], "k,")
```

```
    t=t+h
```

```
    i=i+1
```

```
plt.show()
```

B.2. DPV mit Schrittweitensteuerung für das PCR3BP (Test)

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import numpy as np
```

```
#Startwerte und Schrittweite
```

```
t=0
```

```
y=[[1.2, 0], [0, -1.04935750983]]
```

```
h=0.0001
```

B. Quelltexte

```
T=6.19217
mu=0.012277471
nu=1-mu
i=0
eps=10**(-6)
tau=0.8
delta=eps
q=4

#Definiere DGL
def f(t,y):
    return [[y[1][0], y[1][1]], [y[0][0]+2*y[1][1]-(nu*(y[0][0]+mu))
        ↪ /((y[0][0]+mu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)-(mu*(y[0][0]-nu))/((y
        ↪ [0][0]-nu)**2+y[0][1]**2)**(3/2), y[0][1]-2*y[1][0]-(nu*y
        ↪ [0][1])/((y[0][0]+mu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)-(mu*y[0][1])
        ↪ /((y[0][0]-nu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)]]

#Gewichte B fuer q=5
B1=35/384
B2=0
B3=500/1113
B4=125/192
B5=-2187/6784
B6=11/84
B7=0

#Gewichte b fuer q=4
b1=5179/57600
b2=0
b3=7561/16695
b4=393/640
b5=-92097/339200
b6=187/2100
b7=1/40

#Stuetzstellen c
c1=0
```

B. Quelltexte

$$c2=1/5$$

$$c3=3/10$$

$$c4=4/5$$

$$c5=8/9$$

$$c6=1$$

$$c7=1$$

#Koeffizienten aus A

$$a21=1/5$$

$$a31=3/40$$

$$a41=44/45$$

$$a51=19372/6561$$

$$a61=9017/3168$$

$$a71=35/384$$

$$a32=9/40$$

$$a42=-56/15$$

$$a52=-25360/2187$$

$$a62=-355/33$$

$$a72=0$$

$$a43=32/9$$

$$a53=64448/6561$$

$$a63=46732/5247$$

$$a73=500/1113$$

$$a54=-212/729$$

$$a64=49/176$$

$$a74=125/192$$

$$a65=-5103/18656$$

$$a75=-2187/6784$$

$$a76=11/84$$

while t<=T:

while True:

$$h=h*\tau*(\text{eps}/\text{delta})**(1/(q+1))$$

#Stufen fuer das RKV im

$$k1=y$$

$$k2=y+h*a21*np.asarray(f(t+c2*h,k1))$$

B. Quelltexte

```
k3=y+h*a31*np.asarray(f(t+c3*h,k1))+h*a32*np.asarray(f(t+c3*
    ↪ h,k2))
k4=y+h*a41*np.asarray(f(t+c4*h,k1))+h*a42*np.asarray(f(t+c4*
    ↪ h,k2))+h*a43*np.asarray(f(t+c4*h,k3))
k5=y+h*a51*np.asarray(f(t+c5*h,k1))+h*a52*np.asarray(f(t+c5*
    ↪ h,k2))+h*a53*np.asarray(f(t+c5*h,k3))+h*a54*np.asarray
    ↪ (f(t+c5*h,k4))
k6=y+h*a61*np.asarray(f(t+c6*h,k1))+h*a62*np.asarray(f(t+c6*
    ↪ h,k2))+h*a63*np.asarray(f(t+c6*h,k3))+h*a64*np.asarray
    ↪ (f(t+c6*h,k4))+h*a65*np.asarray(f(t+c6*h,k5))
k7=y+h*a71*np.asarray(f(t+c7*h,k1))+h*a72*np.asarray(f(t+c7*
    ↪ h,k2))+h*a73*np.asarray(f(t+c7*h,k3))+h*a74*np.asarray
    ↪ (f(t+c7*h,k4))+h*a75*np.asarray(f(t+c7*h,k5))+h*a76*np
    ↪ .asarray(f(t+c7*h,k6))
```

#RKV fuer Ordnung 4

```
y0=y+h*b1*np.asarray(f(t+c1*h,k1))+h*b2*np.asarray(f(t*c2*h,
    ↪ k2))+b3*h*np.asarray(f(t+c3*h,k3))+b4*h*np.asarray(f(t
    ↪ +c4*h,k4))+b5*h*np.asarray(f(t+c5*h,k5))+b6*h*np.
    ↪ asarray(f(t+c6*h,k6))+b7*h*np.asarray(f(t+c7*h,k7))
```

#RKV fuer Ordnung 5

```
y1=y+h*B1*np.asarray(f(t+c1*h,k1))+h*B2*np.asarray(f(t*c2*h,
    ↪ k2))+B3*h*np.asarray(f(t+c3*h,k3))+B4*h*np.asarray(f(t
    ↪ +c4*h,k4))+B5*h*np.asarray(f(t+c5*h,k5))+B6*h*np.
    ↪ asarray(f(t+c6*h,k6))+B7*h*np.asarray(f(t+c7*h,k7))
```

```
delta=np.linalg.norm(y1-y0)
```

```
if delta < eps:
```

```
    y=y1
```

```
    break
```

```
print(t,y,i)
```

```
plt.plot(y[0][0],y[0][1], "k,")
```

```
t=t+h
```

```
i=i+1
```

```
plt.show()
```

B.3. DPV mit Schrittweitensteuerung für das PCR3BP (Abbildung der Trajektorien)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

#Startwerte und Schrittweite
t=0
x=[[0,0],[0,0]] #Hilfsmatrix
yort=[0.15,0]
mu=0.05
nu=1-mu
omega=((yort[0]**2+yort[1]**2)/2)+(nu/((yort[0]+mu)**2+yort[1]**2)
    ↪ ** (1/2))+(mu/((yort[0]-nu)**2+yort[1]**2)**(1/2))+(mu*nu/2)
velocity=np.sqrt(2*(omega-1.71)) #Geschwindigkeitsbetrag
w=float(input("Startwinkel: ")) #Winkel
y=[[0.15,0],[velocity*math.cos(w*math.pi/360),velocity*math.sin(w*
    ↪ math.pi/360)]]
h=0.0001
T=100
eps=10**(-6)
tau=0.8
i=0 #Schrittzaehler
j=0 #Zaehler fuer Mondumrundung
delta=eps
q=4

#Hill-Regionen
xlist = np.linspace(-1.4, 1.4, 1000)
ylist = np.linspace(-1.4, 1.4, 1000)
X, Y = np.meshgrid(xlist, ylist)
Z = (X**2+Y**2)/2+0.95/(np.sqrt((X+0.05)**2+Y**2))+0.05/(np.sqrt((X
    ↪ -0.95)**2+Y**2))+0.05*0.95/2
```

B. Quelltexte

```
E = (X+0.05)**2+Y**2
M = (X-0.95)**2+Y**2
cp = plt.contour(X, Y, Z, [1.71])
ce = plt.contour(X, Y, E, [0.04])
cm = plt.contour(X, Y, M, [0.0001])
plt.clabel(cp, inline=False, fontsize=0)

#Lagrange-Punkte
plt.plot(0.72,0, "b+", label="L1")
plt.plot(1.23,0, "b+", label="L2")
plt.plot(-1.02,0, "b+", label="L3")
plt.plot(0.45,0.87, "b+", label="L4")
plt.plot(0.45,-0.87, "b+", label="L5")

#System Erde-Mond
plt.plot(0.95,0, "g.", label="M")
plt.plot(-0.05,0, "co", label="E")

#Definiere DGL
def f(t,y):
    return [[y[1][0], y[1][1]], [y[0][0]+2*y[1][1]-(nu*(y[0][0]+mu))
        ↪ /((y[0][0]+mu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)-(mu*(y[0][0]-nu))/((y
        ↪ [0][0]-nu)**2+y[0][1]**2)**(3/2), y[0][1]-2*y[1][0]-(nu*y
        ↪ [0][1])/((y[0][0]+mu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)-(mu*y[0][1])
        ↪ /((y[0][0]-nu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)]]

#Definiere Abhaengigkeit vom Radius Erde
def r(y):
    return (y[0][0]+0.05)**2+y[0][1]**2

#Definiere Abhaengigkeit vom Radius Mond
def R(y):
    return (y[0][0]-0.95)**2+y[0][1]**2

#Gewichte B fuer q=5
B1=35/384
B2=0
```

B. Quelltexte

$$B3=500/1113$$

$$B4=125/192$$

$$B5=-2187/6784$$

$$B6=11/84$$

$$B7=0$$

#Gewichte b fuer q=4

$$b1=5179/57600$$

$$b2=0$$

$$b3=7561/16695$$

$$b4=393/640$$

$$b5=-92097/339200$$

$$b6=187/2100$$

$$b7=1/40$$

#Stuetzstellen c

$$c1=0$$

$$c2=1/5$$

$$c3=3/10$$

$$c4=4/5$$

$$c5=8/9$$

$$c6=1$$

$$c7=1$$

#Koeffizienten aus A

$$a21=1/5$$

$$a31=3/40$$

$$a41=44/45$$

$$a51=19372/6561$$

$$a61=9017/3168$$

$$a71=35/384$$

$$a32=9/40$$

$$a42=-56/15$$

$$a52=-25360/2187$$

$$a62=-355/33$$

$$a72=0$$

$$a43=32/9$$

B. Quelltexte

```
a53=64448/6561
a63=46732/5247
a73=500/1113
a54=-212/729
a64=49/176
a74=125/192
a65=-5103/18656
a75=-2187/6784
a76=11/84
```

```
while t<=T:
```

```
    while True:
```

```
        h=h*tau*(eps/delta)**(1/(q+1))
```

```
        #Stufen fuer das RKV im
```

```
        k1=y
```

```
        k2=y+h*a21*np.asarray(f(t+c2*h,k1))
```

```
        k3=y+h*a31*np.asarray(f(t+c3*h,k1))+h*a32*np.asarray(f(t+c3*
        ↪ h,k2))
```

```
        k4=y+h*a41*np.asarray(f(t+c4*h,k1))+h*a42*np.asarray(f(t+c4*
        ↪ h,k2))+h*a43*np.asarray(f(t+c4*h,k3))
```

```
        k5=y+h*a51*np.asarray(f(t+c5*h,k1))+h*a52*np.asarray(f(t+c5*
        ↪ h,k2))+h*a53*np.asarray(f(t+c5*h,k3))+h*a54*np.asarray
        ↪ (f(t+c5*h,k4))
```

```
        k6=y+h*a61*np.asarray(f(t+c6*h,k1))+h*a62*np.asarray(f(t+c6*
        ↪ h,k2))+h*a63*np.asarray(f(t+c6*h,k3))+h*a64*np.asarray
        ↪ (f(t+c6*h,k4))+h*a65*np.asarray(f(t+c6*h,k5))
```

```
        k7=y+h*a71*np.asarray(f(t+c7*h,k1))+h*a72*np.asarray(f(t+c7*
        ↪ h,k2))+h*a73*np.asarray(f(t+c7*h,k3))+h*a74*np.asarray
        ↪ (f(t+c7*h,k4))+h*a75*np.asarray(f(t+c7*h,k5))+h*a76*np
        ↪ .asarray(f(t+c7*h,k6))
```

```
        #RKV fuer Ordnung 4
```

```
        y0=y+h*b1*np.asarray(f(t+c1*h,k1))+h*b2*np.asarray(f(t*c2*h,
        ↪ k2))+b3*h*np.asarray(f(t+c3*h,k3))+b4*h*np.asarray(f(t
```

B. Quelltexte

```
↪ +c4*h,k4))+b5*h*np.asarray(f(t+c5*h,k5))+b6*h*np.  
↪ asarray(f(t+c6*h,k6))+b7*h*np.asarray(f(t+c7*h,k7))
```

```
#RKV fuer Ordnung 5
```

```
y1=y+h*B1*np.asarray(f(t+c1*h,k1))+h*B2*np.asarray(f(t+c2*h,  
↪ k2))+B3*h*np.asarray(f(t+c3*h,k3))+B4*h*np.asarray(f(t  
↪ +c4*h,k4))+B5*h*np.asarray(f(t+c5*h,k5))+B6*h*np.  
↪ asarray(f(t+c6*h,k6))+B7*h*np.asarray(f(t+c7*h,k7))
```

```
delta=np.linalg.norm(y1-y0)
```

```
if delta < eps:
```

```
    x=y
```

```
    y=y1
```

```
    if x[0][1]*y[0][1]<0:
```

```
        if y[0][0]>0.96 and y[0][0]<1.18:
```

```
            j=j+1
```

```
        break
```

```
plt.plot(y[0][0],y[0][1], "k,")
```

```
t=t+h
```

```
i=i+1
```

```
if r(y) < 0.04:
```

```
    print("Trajektorie", j, "bei_Anstiegswinkel", w, "Landung_
```

```
↪ auf_der_Erde_nach_Zeit", t, "Anzahl_der_Schritte:", i)
```

```
    break
```

```
elif R(y) < 0.0001:
```

```
    print("Trajektorie", j, "bei_Anstiegswinkel", w, "Landung_
```

```
↪ auf_dem_Mond_nach_Zeit", t, "Anzahl_der_Schritte:", i)
```

```
    break
```

```
plt.show()
```

B.4. DPV mit Schrittweisensteuerung für das PCR3BP (Abhängigkeit der Trajektorie vom Startwinkel)

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

#Startwerte und Schrittweite
#t=0
x=[[0,0],[0,0]] #Hilfsmatrix
mu=0.05
nu=1-mu
yort=[0.15,0]
omega=((yort[0]**2+yort[1]**2)/2)+(nu/((yort[0]+mu)**2+yort[1]**2)
    ↪ ** (1/2))+(mu/((yort[0]-nu)**2+yort[1]**2)**(1/2))+(mu*nu/2)
velocity=np.sqrt(2*(omega-1.71)) #Geschwindigkeitsbetrag
h=0.0001
T=100
eps=10**(-6)
tau=0.8
delta=eps
q=4
u=float(input("Startwinkel: ")) #Winkel
v=float(input("Endwinkel: "))
w=u
n=int(input("Anzahl der Punkte: "))
fig, (trajektorie, zeit) = plt.subplots(1, 2)
trajektorie.set_title('Trajektorienkategorie')
trajektorie.set_xlabel('Startwinkel')
trajektorie.set_ylabel('Trajektorienkategorie')
zeit.set_title('Laufzeit')
zeit.set_xlabel('Startwinkel')
zeit.set_ylabel('Laufzeit')
fig.suptitle('Abhaengigkeiten_vom_Startwinkel', fontsize=16)

#Definiere DGL

```

B. Quelltexte

```
def f(t,y):
    return [[y[1][0],y[1][1]],[y[0][0]+2*y[1][1]-(nu*(y[0][0]+mu))
    ↪ /((y[0][0]+mu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)-(mu*(y[0][0]-nu))/((y
    ↪ [0][0]-nu)**2+y[0][1]**2)**(3/2),y[0][1]-2*y[1][0]-(nu*y
    ↪ [0][1])/((y[0][0]+mu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)-(mu*y[0][1])
    ↪ /((y[0][0]-nu)**2+y[0][1]**2)**(3/2)]]

#Definiere Abhaengigkeit vom Radius Erde
def r(y):
    return (y[0][0]+0.05)**2+y[0][1]**2

#Definiere Abhaengigkeit vom Radius Mond
def R(y):
    return (y[0][0]-0.95)**2+y[0][1]**2

#Gewichte B fuer q=5
B1=35/384
B2=0
B3=500/1113
B4=125/192
B5=-2187/6784
B6=11/84
B7=0

#Gewichte b fuer q=4
b1=5179/57600
b2=0
b3=7561/16695
b4=393/640
b5=-92097/339200
b6=187/2100
b7=1/40

#Stuetzstellen c
c1=0
c2=1/5
c3=3/10
```

B. Quelltexte

c4=4/5

c5=8/9

c6=1

c7=1

#Koeffizienten aus A

a21=1/5

a31=3/40

a41=44/45

a51=19372/6561

a61=9017/3168

a71=35/384

a32=9/40

a42=-56/15

a52=-25360/2187

a62=-355/33

a72=0

a43=32/9

a53=64448/6561

a63=46732/5247

a73=500/1113

a54=-212/729

a64=49/176

a74=125/192

a65=-5103/18656

a75=-2187/6784

a76=11/84

while w<v:

 t=0

 i=0

 j=0

 y=[yort ,[velocity *math.cos (w*math.pi/360) , velocity *math.sin (w*
 ↪ math.pi/360)]]

while t<=T:

while True:

B. Quelltexte

```
h=h*tau*(eps/delta)**(1/(q+1))
```

```
#Stufen fuer das RKV im
```

```
k1=y
```

```
k2=y+h*a21*np.asarray(f(t+c2*h,k1))
```

```
k3=y+h*a31*np.asarray(f(t+c3*h,k1))+h*a32*np.asarray(f(t  
↪ +c3*h,k2))
```

```
k4=y+h*a41*np.asarray(f(t+c4*h,k1))+h*a42*np.asarray(f(t  
↪ +c4*h,k2))+h*a43*np.asarray(f(t+c4*h,k3))
```

```
k5=y+h*a51*np.asarray(f(t+c5*h,k1))+h*a52*np.asarray(f(t  
↪ +c5*h,k2))+h*a53*np.asarray(f(t+c5*h,k3))+h*a54*np  
↪ .asarray(f(t+c5*h,k4))
```

```
k6=y+h*a61*np.asarray(f(t+c6*h,k1))+h*a62*np.asarray(f(t  
↪ +c6*h,k2))+h*a63*np.asarray(f(t+c6*h,k3))+h*a64*np  
↪ .asarray(f(t+c6*h,k4))+h*a65*np.asarray(f(t+c6*h,  
↪ k5))
```

```
k7=y+h*a71*np.asarray(f(t+c7*h,k1))+h*a72*np.asarray(f(t  
↪ +c7*h,k2))+h*a73*np.asarray(f(t+c7*h,k3))+h*a74*np  
↪ .asarray(f(t+c7*h,k4))+h*a75*np.asarray(f(t+c7*h,  
↪ k5))+h*a76*np.asarray(f(t+c7*h,k6))
```

```
#RKV fuer Ordnung 4
```

```
y0=y+h*b1*np.asarray(f(t+c1*h,k1))+h*b2*np.asarray(f(t*  
↪ c2*h,k2))+b3*h*np.asarray(f(t+c3*h,k3))+b4*h*np.  
↪ asarray(f(t+c4*h,k4))+b5*h*np.asarray(f(t+c5*h,k5)  
↪ )+b6*h*np.asarray(f(t+c6*h,k6))+b7*h*np.asarray(f(  
↪ t+c7*h,k7))
```

```
#RKV fuer Ordnung 5
```

```
y1=y+h*B1*np.asarray(f(t+c1*h,k1))+h*B2*np.asarray(f(t*  
↪ c2*h,k2))+B3*h*np.asarray(f(t+c3*h,k3))+B4*h*np.  
↪ asarray(f(t+c4*h,k4))+B5*h*np.asarray(f(t+c5*h,k5)  
↪ )+B6*h*np.asarray(f(t+c6*h,k6))+B7*h*np.asarray(f(  
↪ t+c7*h,k7))
```

B. Quelltexte

```
delta=np.linalg.norm(y1-y0)

if delta<eps:
    x=y
    y=y1
    if x[0][1]*y[0][1]<0:
        if y[0][0]>0.96 and y[0][0]<1.18:
            j=j+1
        break

t=t+h
i=i+1

if r(y)<0.04:
    print("Trajektorie", j, "bei Anstiegswinkel", w, "
        ↳ Landung_auf_der_Erde_nach_Zeit", t)
    trajektorie.plot(w,j,"ro")
    zeit.plot(w,t,"ro")
    break

elif R(y)<0.0001:
    print("Trajektorie", j, "bei Anstiegswinkel", w, "
        ↳ Landung_auf_dem_Mond_nach_Zeit", t)
    trajektorie.plot(w,j,"co")
    zeit.plot(w,t,"co")
    break

w=w+((v-u)/n)

plt.show()
```

C. Kompetenzbereiche Bildungsstandards

C.1. Sachkompetenz

| | | |
|---|------------------|--|
| Modelle und Theorien zur Bearbeitung von Aufgaben und Problemen nutzen | Die Lernenden... | |
| | S1 | erklären Phänomene unter Nutzung bekannter physikalischer Modelle und Theorien; |
| | S2 | erläutern Gültigkeitsbereiche von Modellen und Theorien und beschreiben deren Aussage- und Vorhersagemöglichkeiten; |
| | S3 | wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. |
| Verfahren und Experimente zur Bearbeitung von Aufgaben und Problemen nutzen | S4 | bauen Versuchsanordnungen auch unter Verwendung von digitalen Messwerterfassungssystemen nach Anleitungen auf, führen Experimente durch und protokollieren ihre Beobachtungen; |
| | S5 | erklären bekannte Messverfahren sowie die Funktion einzelner Komponenten eines Versuchsaufbaus; |
| | S6 | erklären bekannte Auswerteverfahren und wenden sie auf Messergebnisse an; |
| | S7 | wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an. |

Tabelle 5: Auflistung der Sachkompetenzen nach [KMK, 2020], S. 14

C.2. Erkenntnisgewinnungskompetenz

| | | |
|---|------------------|---|
| Fragestellungen und Hypothesen auf Basis von Beobachtungen und Theorien bilden | Die Lernenden... | |
| | E1 | identifizieren und entwickeln Fragestellungen zu physikalischen Sachverhalten; |
| | E2 | stellen theoriegeleitet Hypothesen zur Bearbeitung von Fragestellungen auf. |
| Fachspezifische Modelle und Verfahren charakterisieren, auswählen und zur Untersuchung von Sachverhalten nutzen | E3 | beurteilen die Eignung von Untersuchungsverfahren zur Prüfung bestimmter Hypothesen; |
| | E4 | modellieren Phänomene physikalisch, auch mithilfe mathematischer Darstellungen und digitaler Werkzeuge, wobei sie theoretische Überlegungen und experimentelle Erkenntnisse aufeinander beziehen; |
| | E5 | planen geeignete Experimente und Auswertungen zur Untersuchung einer physikalischen Fragestellung. |
| Erkenntnisprozesse und Ergebnisse interpretieren und reflektieren | E6 | erklären mithilfe bekannter Modelle und Theorien die in erhobenen oder recherchierten Daten gefundenen Strukturen und Beziehungen; |
| | E7 | berücksichtigen Messunsicherheiten und analysieren die Konsequenzen für die Interpretation des Ergebnisses; |
| | E8 | beurteilen die Eignung physikalischer Modelle und Theorien für die Lösung von Problemen; |
| | E9 | reflektieren die Relevanz von Modellen, Theorien, Hypothesen und Experimenten für die physikalische Erkenntnisgewinnung. |
| Merkmale wissenschaftlicher Aussagen und Methoden charakterisieren und reflektieren | E10 | beziehen theoretische Überlegungen und Modelle zurück auf Alltagssituationen und reflektieren ihre Generalisierbarkeit; |
| | E11 | reflektieren Möglichkeiten und Grenzen des konkreten Erkenntnisgewinnungsprozesses sowie der gewonnenen Erkenntnisse (z.B. Reproduzierbarkeit, Falsifizierbarkeit, Intersubjektivität, logische Konsistenz, Vorläufigkeit). |

Tabelle 6: Auflistung der Erkenntnisgewinnungskompetenzen nach [KMK, 2020], S. 15 f.

D. Erklärung

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln (z. B. Nachschlagewerke oder Internet) angefertigt habe. Alle Stellen der Arbeit, die ich aus diesen Quellen und Hilfsmitteln dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen habe, sind kenntlich gemacht und im Literaturverzeichnis aufgeführt. Weiterhin versichere, ich, dass weder ich noch andere diese Arbeit weder in der vorliegenden noch in einer mehr oder weniger abgewandelten Form als Leistungsnachweise in einer anderen Veranstaltung bereits verwendet haben oder noch verwenden werden.

Die „Richtlinie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis für Studierende an der Universität Potsdam (Plagiatsrichtlinie) - Vom 20. Oktober 2010“, im Internet unter <http://www.uni-potsdam.de/am-up/2011/ambek-2011-01-037-039.pdf>, ist mir bekannt.

Es handelt sich bei dieser Arbeit um meinen ersten Versuch.

Brandenburg an der Havel, den 18. Februar 2022

Jasmin Sophie Pusch